



ENGINIUS
Formation & Recrutement

CONCOURS ENGINIUS 2018

Epreuve de MATHÉMATIQUES

(Entrée en 1^{ère} année du cycle préparatoire)

Informations sur l'épreuve

Barème :	30
Durée :	90min
Calculatrice autorisée :	Non

Merci de ne rien marquer sur le sujet.

Pour chaque question de l'épreuve, veuillez choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Répondez sur la grille de réponses séparée.

Uniquement les grilles de réponses correctement remplies seront corrigées.

Exercice 1. Soient a, b et c trois nombres complexes distincts, A, B et C leurs images dans le plan. On note $t = \frac{c-a}{b-a}$.

Question 1. Soit $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la relation $t = re^{i\theta}$ se traduit géométriquement par:

- A) $AC = r AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[2\pi]$
- B) $AB = r AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta[2\pi]$
- C) $AC = r AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta[2\pi]$
- D) $AC = r^2 AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[2\pi]$

Question 2. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si :

- A) $t \in i\mathbb{R}$
- B) $t \in \mathbb{R}_+$
- C) $t \in i\mathbb{R}_+$
- D) $t \in \mathbb{R}^*$

Question 3. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si :

- A) $t \in i\mathbb{R}^*$
- B) $t \in \mathbb{R}_+$
- C) $t \in i\mathbb{R}_+$
- D) $t \in \mathbb{R}$

Exercice 2. Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous ensemble à p éléments:

Question 4. Le nombre de parties de E est :

- A) n^2
- B) 2^n
- C) n^n
- D) $n!$

Question 5. Le nombre de parties de E contenant un et un seul élément de A est :

- A) $n2^{n-p}$
- B) $pn2^{n-p}$
- C) $p2^{n-p}$
- D) 2^{n-p}

Exercice 3. Soient α et β deux réels avec $0 < \alpha < \beta$ et considérons les suites réelles : (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = \alpha \text{ et pour tout } n \geq 0, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_0 = \beta \text{ et pour tout } n \geq 0, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n + v_n}$$

Posons : $x_n = \frac{u_n}{v_n}$ et $y_n = u_n - v_n$

Question 6. La suite (x_n) :

- A) Converge vers $\frac{\alpha}{\beta}$
- B) Converge vers 1
- C) Converge vers 0
- D) Diverge.

Question 7. La suite (y_n) :

- A) Converge vers $\alpha - \beta$
- B) Converge vers $\alpha + \beta$
- C) Converge vers 0
- D) Diverge.

Question 8. La suite (u_n) :

- A) Converge vers α
- B) Converge vers β
- C) Converge vers 0
- D) Diverge

Question 9. La suite (v_n) :

- A) Converge vers $\alpha - \beta$
- B) Converge vers $\beta - \alpha$
- C) Converge vers β
- D) Diverge

Exercice 4. Le plan complexe P est rapporté au repère orthogonal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Le point A d'affixe $3i$. On désigne par f l'application qui, à tout point M d'affixe z , distinct de A , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{3iz-7}{z-3i}$

On dit que M est invariant si $M = M'$

Question 10. f admet deux points invariants B et C et on note z_B et z_C les affixes respectives. La somme des parties imaginaires de z_B et z_C vaut :

- A) -6
- B) 6
- C) 5
- D) -5

On admet que B et C sont tels que $|\operatorname{Im}(z_B)| > |\operatorname{Im}(z_C)|$ et on appelle ε le cercle de diamètre $[BC]$. Soit M un point quelconque de ε différent de B et de C et M' son image par f .

Question 11. Il existe un réel θ tel que l'affixe z de M s'écrit

- A) $3i - 4e^{i\theta}$
- B) $-3i - 4e^{i\theta}$
- C) $3i + 4e^{-i\theta}$
- D) $3i + 4e^{i\theta}$

Question 12. Il existe un réel θ tel que l'affixe z' de M' s'écrit

- A) $3i - 4e^{-i\theta}$
- B) $-3i + 4e^{i\theta}$
- C) $-3i - 4e^{-i\theta}$
- D) $3i + 4e^{-i\theta}$

Question 13. Le point M' est

- A) à l'intérieur du cercle ε
- B) à l'extérieur du cercle ε
- C) appartient au cercle ε
- D) est le centre du cercle ε

Question 14. On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q des entiers naturels donnés strictement supérieurs à 1) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

- A) $\binom{p+q}{q}$
- B) $q \binom{p+q}{q}$
- C) $\binom{pq}{q}$
- D) 2^{p+q}

Question 15. Soit f la fonction à variable réelle définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

- A) f est injective

- B) f est surjective
 C) f n'est pas injective
 D) f n'est pas injective et n'est pas surjective

Question 16. Combien le nombre $15!$ admet-il de diviseurs ?

- A) 4032
 B) 3042
 C) 2034
 D) 3044

Question 17. Un QCM comporte 20 questions, pour chacune d'elles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Le nombre de grilles de réponses possibles est :

- A) 4^{20}
 B) 20^4
 C) 800
 D) 80

Question 18. Soit $(x, y, z) \in [0,1]^3$. Posons $a = \text{Min}\{x(1-y), y(1-z), z(1-x)\}$

- A) $a = 0$
 B) $a > \frac{1}{4}$
 C) $\frac{1}{8} < a < \frac{1}{4}$
 D) $a \leq \frac{1}{4}$

Question 19. La somme $\sum_{k=0}^{2018} (-1)^k \binom{2018}{k}$ est égale à :

- A) 0
 B) 1
 C) 2
 D) 2018

Question 20. La somme $\sum_{0 \leq i \leq 10} \sum_{0 \leq j \leq 10} (i+j)^2$ est égale à :

- A) 10000
 B) 10750
 C) 13000
 D) 13750

Question 21. Toute fonction discontinue sur \mathbb{R} est :

- A) constante
 B) non dérivable

- C) dérivable
- D) périodique

Question 22. Toute fonction strictement croissante \mathbb{R} est :

- A) paire
- B) impaire
- C) injective
- D) surjective

Question 23. Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- A) f' n'est pas continue en 0
- B) f' est continue en 0
- C) f' admet une limite finie en 0
- D) f' a pour limite $+\infty$ en 0

Question 24. La valeur de $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$ est égale à :

- A) 1
- B) e^{-4}
- C) \sqrt{e}
- D) 0

Question 25. La valeur de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3}{x + \sqrt{x}}$ est égale à :

- A) $+\infty$
- B) 0
- C) 1
- D) 3

Question 26. Soient r_i ($i = 1, \dots, 4$) les quatre racines de l'équation réelle de l'équation

$$(x - 7)(x - 5)(x + 4)(x + 6) = 608$$

Le produit des racines $\prod_{i=1}^4 r_i$ vaut

- A) 464
- B) 608
- C) 232
- D) 240

Question 27. La valeur de l'intégrale $\int_e^{e^2} \frac{1 + \ln(x)}{x \ln(x)} dx$ est

- A) $1 - \ln(2)$

- B) $1 + \ln(2)$
- C) $\ln(2)$
- D) 1.

Question 28. La valeur de l'intégrale $\int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx$ est

- A) $\frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$
- B) $\frac{\pi^2 + 4}{\pi^3}$
- C) $\frac{4}{\pi^3}$
- D) $-\frac{4}{\pi^3}$

Question 29. Soient $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$. On a

- A) $I = J = 0$
- B) $I = \frac{\pi}{2}$ et $J = \frac{\pi}{4}$
- C) $I = J = \frac{\pi}{4}$
- D) $I = \frac{\pi}{3}$ et $J = \pi$

Question 30. Soit $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1 + x^2 \cos(x)} dx$. On a

- A) $I = \pi$
- B) $I = 2\pi$
- C) $I = 0$
- D) $I = \pi^2$