ENGINIUS
Formation & Recrutement

CONCOURS ENGINIUS 2019

Epreuve de MATHEMATIQUES

Informations sur l'épreuve

Barème :	30
Durée :	90 min
Calculatrice autorisée :	Non

Merci de ne rien marquer sur le sujet.
Pour chaque question de l'épreuve, veuillez choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
Répondez sur la grille de réponses séparée.
Uniquement les grilles de réponses correctement remplies seront corrigées.

Partie A.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)-1}\right)$.

Question 1.

a) L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$, car la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$;

b) L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}_+$, car la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$;

c) L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}_+^*$;

d) L'ensemble de définition de f est $D_f =]0, \mathrm{e}[\cup]\mathrm{e}, +\infty[$.

Question 2. La fonction f a pour limites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \mathrm{e}$;

d) $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}} f(x) = 0$.

Question 3. La dérivée de la fonction f en $x \in D_f$ s'écrit

a) $f'(x) = f(x)$, car $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$;

b) $f'(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x)-1} f(x)$;

c) $f'(x) = \frac{-1}{x(\ln(x)-1)^2} f(x)$;

d) $f'(x) = \frac{-1}{x(\ln(x)-1)^2} \mathrm{e}^x$.

Question 4. La courbe représentative de f admet

a) Une tangente d'équation $y = -x + 2$ au point d'abscisse $x = 1$;

b) Une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$;

c) Une asymptote verticale au voisinage de 0 ;

d) Une asymptote en $x = 1$.

Question 5. La fonction f est bijective de D_f sur D_f. Sa fonction réciproque est notée $f^{-1}(x)$

a) $x \longmapsto f^{-1}(x)$ est définie sur D_f ;

b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$;

c) $f^{-1}(x) = f(x)$;

d) $f^{-1}(x) = \exp\left(\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)}\right)$.

Partie B.

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\sin(a)}{1-2t\cos(a)+t^2} dt$ où a est une constante telle que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a \neq k\pi$ et pour k entier relatif.

Question 6. On a

a) $\frac{1-\cos(a)}{\sin(a)} = 1 - \tan(a)$;

b) $-\frac{\cos(a)}{\sin(a)} = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$;

c) $\frac{1-\cos(a)}{\sin(a)} = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$;

d) $-\frac{\cos(a)}{\sin(a)} = -\arctan(a)$.

Question 7. On a

a) $\tan\left(\arctan\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{a}{2}$;

b) $\arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{a}{2}$;

c) $\arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{a}{2}$ si $a \in]-\pi, \pi[$;

d) $\arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{a}{2} + \pi$.

Question 8. En appliquant le changement de variables $t = \cos(a) + x\sin(a)$ dans l'intégrale I, on obtient

a) $I = \int_{\frac{\cos(a)}{\sin(a)}}^{1-\frac{\cos(a)}{\sin(a)}} \frac{\sin(a)}{1+x^2}\,dx$;

b) $I = \int_{-\frac{\cos(a)}{\sin(a)}}^{1-\frac{\cos(a)}{\sin(a)}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$;

c) $I = \int_{-\frac{\cos(a)}{\sin(a)}}^{1-\frac{\cos(a)}{\sin(a)}} \frac{\sin^2(a)}{1-\cos^2(a)+x^2\sin^2(a)}\,dx$;

d) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Question 9. L'intégrale I vaut

a) $I = \frac{\pi}{4}$;

b) $I = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}$ pour $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;

c) $I = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}$ pour $a \in]-\pi, \pi[$;

d) $I = 0$.

Partie C.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui a tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ associe le triplet

$$\big((2\alpha+1)x - \alpha y + (1+\alpha)z, (\alpha-2)x + (\alpha-1)y + (\alpha-2)z, (2\alpha-1)x + (\alpha-1)y + (2\alpha-1)z\big)$$

Où α est un paramètre réel.

Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et I la matrice unité de l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Question 10. La matrice M de l'endomorphisme par rapport à la base B s'écrit

a) $\begin{pmatrix} 2\alpha+1 & \alpha-2 & 2\alpha-1 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha-1 \\ \alpha+1 & \alpha-2 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2\alpha+1 & -\alpha & \alpha+1 \\ \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha-2 \\ 2\alpha-1 & \alpha-1 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Jusqu'à la question 22 incluse, on se place dans le cas où le paramètre α est égal à $-\mathbf{1}$

Question 11. Le rang de la matrice M est
a) Egal à 1 et $Ker(f)$ est une droite vectorielle ;
b) Egal à 3, car le rang d'une matrice est égal au nombre de colonnes non nulles de cette matrice ;
c) Inférieur ou égal à 2, car M a deux lignes identiques
d) Egal à 2 et $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de dimension 2.

Question 12. On a :
a) $Im(f) \oplus Ker(f) = \mathbb{R}^3$
b) $Im(f)$ est inclus dans le plan vectoriel d'équation $3x + 2y + 3z = 0$
c) $Im(f)$ contient le vecteur $e_2 + e_3$
d) $Ker(f)$ admet (0,1,1) comme base.

Question 13. Le polynôme caractéristique $P_M(M - \lambda I)$ de la matrice M
a) Est de degré 2, car de manière générale le degré du polynôme caractéristique est égal au rang de l'endomorphisme auquel il est associé ;
b) Est de degré 3, car de manière générale le degré du polynôme caractéristique est égal au rang de l'endomorphisme auquel il est associé ;
c) N'est pas divisible λ, car sinon sa trace serait nulle ;
d) Est égal $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 8\lambda$.

Question 14. L'endomorphisme f
a) Admet une seule valeur propre ;
b) Admet 0 comme valeur propre car f n'est pas un automorphisme ;
c) Admet 3 valeurs propres distinctes 0, 2 et 4 ;
d) Admet une valeur propre double.

Question 15. L'endomorphisme f
a) Est diagonalisable, car f admet 3 valeurs propres distinctes
b) N'est pas diagonalisable, car f n'est pas bijectif ;
c) N'est ni diagonalisable, ni trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, car le polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$;
d) N'est pas diagonalisable mais est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, car le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$.

Question 16. On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres éventuellement confondues, rangées dans l'ordre croissant de l'endomorphisme f. On considère $B' = (v_1, v_2, v_3)$, la famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que, pour tout i compris entre 1 et 3, v_i soit un vecteur propre associé à λ_i dont dont la première composante dans la base est égale à 1.
a) B' n'est pas une base de l'espace $\mathbb{R}^3$;
b) v_1 appartient à $\mathrm{Ker}(f)$;
c) (v_1, v_2) est une base du sous espace $Im(f)$;
d) $f(v_3)$ appartient à l'intersection des sous espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $Im(f)$.

Question 17. On note D la matrice de l'endomorphisme f dans la base B', si elle existe, et on note P la matrice de passage de B à B', si elle est définie
a) D et P n'existent pas car B' n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$;

b) $MP = PD$;
c) $PM = DP$;
d) M et D n'ont pas les mêmes valeurs propres.

Question 18. On considère le système (S)

$$\begin{cases} x+y+z & = & r \\ -3x-y+z & = & s \\ -3x-y-5\dfrac{z}{3} & = & t \end{cases}$$

Où r, s, t sont des paramètres réels
a) Le système (S) n'admet pas de solution, car ce n'est pas un système de Cramer ;
b) Le système (S) admet une infinité de solutions si les trois paramètres r, s, t sont nuls ;
c) L'ensemble des solutions de (S) inclut le triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$;
d) L'ensemble des solutions de (S) ne contient qu'un seul élément qui vérifie $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$.

Question 19. La matrice P^{-1}
a) N'est pas définie ;
b) Est la matrice de passage de la base B' à B et vérifie $\operatorname{rang}(P) + \operatorname{rang}(P^{-1}) = 3$;
c) A les coefficients de ses lignes qui sont les composantes des vecteurs de B dans la base B' ;
d) Est la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 12 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Question 20. Soit n un entier naturel, on a
a) $M^n = P^{-1}D^nP$;
b) $M^n = PD^nP^{-1}$;
c) Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, la dernière ligne de M^n est nulle ;
e) Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, M^n a deux lignes identiques.

Question 21. Soit E l'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = b$ où b est un vecteur de $\mathbb{R}^3$
a) Cet ensemble E est non vide si et seulement si b est le vecteur nul ;
b) Cet ensemble E est non vide si et seulement si b appartient à $\operatorname{Im}(f)$;
c) Si $b = v_1$ alors E est la droite vectorielle $\mathbb{R}v_1$;
d) E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On considère les systèmes différentiels linéaires

$$(I)\begin{cases} x_1' & = & -x_1 + x_2 \\ x_2' & = & -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_3' & = & -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (II)\begin{cases} y_1' & = & -4y_1 \\ y_2' & = & -2y_2 \\ y_3' & = & 0 \end{cases}$$

Question 22. On note (y_1, y_2, y_3) une solution de (II), s'il en existe
a) L'ensemble des solutions du système (II) est réduit à un seul élément ;

b) L’ensemble des solutions du système (II) est un espace vectoriel de dimension 3 ;

c) Parmi les solutions de (I) , on a : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$;

d) Parmi les solutions de (I), on a : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Dans les cinq questions suivantes, on suppose $\boldsymbol{\alpha = 1}$

Question 23. Le sous espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f)$ est

a) une droite vectorielle de dimension 1 ;

b) de dimension 2 ;

c) réduit au vecteur nul car est bijectif ;

d) de dimension non nulle au plus égale à 3 car f n’est pas injective.

Question 24. Soit (P) le plan d’équation $y + z = 0$ et (D) la droite d’équation $x = y = z$. On a

a) $\mathrm{Ker}(f)$ est inclus dans (P) ;

b) $\mathrm{Ker}(f) + D = P$;

c) $x = -y = -z$ est une équation de $\mathrm{Ker}(f)$;

d) $2e_1 + e_2 - e_3$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$.

Question 25. On a

a) λ_1 est une valeur propre double, car M est de rang 1 ;

b) M est diagonalisable, car toutes ses valeurs propres sont simples ;

c) $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace propre de dimension 1 ;

d) $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous espace propre de dimension 2.

On considère les matrices N et Q définies par

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Où a et b sont des paramètres réels.

Question 26. On considère l’équation matricielle (1) : $MN = NQ$

a) Elle donne un système de rang 1, donc a et b sont liés par une relation linéaire ;

b) Elle donne un système de rang 2, ce qui permet de déterminer les valeurs de a et b ;

c) Il existe une infinité de solutions (a, b) telles que $a + b = 0$;

d) Le couple $(-2, -2)$ n’est pas solution.

Question 27.

a) Il existe une matrice inversible unique N vérifiant l’équation (1) ;

b) L’équation $MN = NQ$ admet une solution mais la matrice N n’est pas inversible ;

c) Les matrices N et Q sont semblables ;

d) Les matrices M et Q sont semblables.

Partie D.

Soit $\sum a_n Z^n$ une série entière complexe, de rayon de convergence R réel strictement positif et telle que $a_0 = 1$. On note $f(Z)$ la somme de cette série entière lorsque $|Z| < R$, Z appartenant à $\mathbb{C}$, $|Z|$ désignant le module de Z.
On introduit la suite (b_n) définie par $b_0 = 1$ et $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = 0$ pour tout n entier strictement positif.

Question 28. On considère un réel r dans l'intervalle $]0, R[$, on établit que

a) La série numérique de terme général $a_n r^n$ est absolument convergente ;
b) Il existe une constante M strictement positive telle que $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ pour tout entier naturel n ;
c) Pour tout réel K strictement positif, on a pour tout entier naturel n, $\frac{K}{r^n} \leq |a_n|$;
d) La série numérique de terme général $a_n r^n$ converge mais n'est pas absolument convergente.

Question 29. r désignant toujours un réel de l'intervalle $]0, R[$, on a

a) Pour tout M strictement positif et pour tout entier naturel n, $|b_n| \leq \left(\frac{M+1}{r}\right)^n$;
b) Pour tout M strictement positif et pour tout entier naturel n, $|b_n| > \left(\frac{M+1}{r}\right)^n$;
c) Il existe M strictement positif tel que $0 \leq |b_n| t^n \leq \left(t \frac{(M+1)}{r}\right)^n$ pour tout t réel strictement positif et inférieur ou égal à $\frac{r}{(M+1)}$, pour tout entier naturel n ;
d) La suite de terme général $b_n r^n$ est majorée par le terme général d'une suite géométrique.

Question 30. r étant toujours un réel de l'intervalle $]0, R[$, on obtient

a) Le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n Z^n$ est nul ;
b) Le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n Z^n$ est supérieur à $\frac{r}{(M+1)}$ pour tout M strictement positif ;
c) Le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n Z^n$ est égal à 1 ;
d) Il n'existe pas de disque ouvert $D(O, \rho)$, de centre O et de rayon strictement positif ρ dans lequel on ait $f(Z) \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^n = 1$.