CONCOURS ENGINIUS 2017

Epreuve de MATHEMATIQUES (Niveau 3 – Entrée en cycle ingénieur)

Informations sur l'épreuve

Barème :	/30
Durée :	90min
Calculatrice autorisée :	Non

Merci de ne rien marquer sur le sujet.
Pour chaque question de l'épreuve, veuillez choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
Répondez sur la grille de réponses séparée.
Uniquement les grilles de réponses correctement remplies seront corrigées.

Exercice 1.

I. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et strictement décroissante, alors

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0

A. Vrai
B. Faux

2. La série $\sum u_n$ converge

A. Vrai
B. Faux

3. La série $\sum (-1)^n u_n$ converge

A. Vrai
B. Faux

II. Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si la série $\sum v_n$ converge et a pour somme $v \neq 0$, alors

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée

A. Vrai
B. Faux

5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel l

A. Vrai
B. Faux

6. La série $\sum u_n$ converge

A. Vrai
B. Faux

7. La série $\sum u_n$ converge absolument

A. Vrai
B. Faux

Exercice 2.

La fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

8. est continue sur $\mathbf{R}^2$

A. Vrai

B. Faux

9. est différentiable sur $\mathbf{R}^2$

A. Vrai

B. Faux

10. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$

A. Vrai

B. Faux

11. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

A. Vrai

B. Faux

12. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$

A. Vrai

B. Faux

Exercice 4.

13. Le rayon de convergence de la série $\sum n(\log n)x^n$ est $r=1$

A. Vrai

B. Faux

14. Le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{x^n}{\left(\sqrt{n}\right)^n}$ est $r=1$

A. Vrai

B. Faux

15. Le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{n^n}{n!}x^n$ est $r=\exp(1)$

A. Vrai

B. Faux

Exercice 5.

16. L'équation $\cos x - x - \dfrac{1}{2}=0$ admet une unique solution dans $\mathbf{R}$

A. Vrai

B. Faux

17. Soit E l'équation différentielle suivante

E : $y''(t)-2y'(t)+y(t)=t\exp(t)$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

La solution de E est : $y(t)=\exp(t)\left(1-t+\dfrac{t^3}{3}\right)$

A. Vrai
B. Faux

Exercice 6. Une application linéaire $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ qui aux vecteurs i, j, k de la base canonique associe :

$T(i)=(0,0)$, $T(j)=(1,1)$ and $T(k)=(1,-1)$

18. $T(4i-j+k)=(0,-2)$

A. Vrai
B. Faux

19. $\dim(\mathrm{Ker}T)=2$

A. Vrai
B. Faux

20. $\dim(\mathrm{Im}T)=2$

A. Vrai
B. Faux

21. La matrice de T est $M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

A. Vrai
B. Faux

22. La matrice de T est $M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

A. Vrai
B. Faux

Exercice 7.

23. Une matrice carrée réelle d'ordre n est diagonalisable si et seulement si elle a n valeurs propres distinctes

A. Vrai
B. Faux

24. Une matrice carrée réelle M d'ordre n est diagonalisable s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que : $P^{-1} \cdot M \cdot Q$ soit une matrice diagonale

A. Vrai
B. Faux

25. Une matrice carrée réelle M d'ordre n est diagonalisable s'il existe une famille libre de n vecteurs colonnes qui soient vecteurs propres de M

A. Vrai
B. Faux

26. Une matrice carrée réelle M d'ordre n est diagonalisable si et seulement si il existe une famille libre de n vecteurs colonnes qui soient vecteurs propres de M

A. Vrai
B. Faux

27. Une matrice carrée réelle M d'ordre n est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1} \cdot M \cdot P$ soit une matrice diagonale

A. Vrai
B. Faux

28. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$

A. Vrai
B. Faux

29. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$

A. Vrai
B. Faux

30. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$

A. Vrai
B. Faux