Concours Enginius

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Session 2022

Informations sur le sujet de l'épreuve

Durée de l'épreuve :	1h30
Épreuve notée sur :	20 points
Document(s) autorisé(s) :	☐ oui ☒ non
Calculatrice autorisée :	☐ oui ☒ non

Remarques

Le sujet est constitué de deux exercices et un problème indépendants.

Pour chaque question de l'épreuve, veuillez noircir (comme ceci ■) la (les) bonne(s) réponse(s) sur la feuille de réponse ci-jointe.

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent avoir une ou plusieurs bonnes réponses.

Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.

Uniquement les feuilles de réponses correctement remplies seront corrigées.

Début du sujet sur la page suivante

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel non nul.

Question 1 Le déterminant de A vaut

- [A] 1
- [B] 2
- [C] 0 car il n'y a que des 0 sur la diagonale
- [D] a

Question 2 La matrice A^2 vaut

- [A] $A + 2I_3$
- [B] $2A$
- [C] $\begin{pmatrix} 0 & a^2 & a^4 \\ \frac{1}{a^2} & 0 & a^2 \\ \frac{1}{a^4} & \frac{1}{a^2} & 0 \end{pmatrix}$
- [D] $A + I_3$

Question 3 La matrice A

- [A] n'est pas inversible car son déterminant est nul
- [B] est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix}$
- [C] est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -a & -a^2 \\ -\frac{1}{a} & -1 & -a \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix}$
- [D] est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 0 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ dont les coefficients sont des nombres complexes. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie la propriété suivante, que l'on note $P(m)$ avec m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$P(m) \ : \quad A^m + A^{m-1} + \ldots + A + I_n = O_n$$

O_n étant la matrice nulle et I_n la matrice identité.

Question 4 ♣ On établit que :

- [A] A est inversible, d'inverse A^n
- [B] A est nilpotente d'indice k, c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $A^k = O_n$ et $A^{k-1} \neq O_n$
- [C] A n'est pas inversible
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ La matrice $A = \begin{pmatrix} 2i+1 & i+1 & -i-1 \\ 0 & i & 0 \\ 2i+2 & 2i+2 & -i-2 \end{pmatrix}$

A Admet pour inverse : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i & -1+i \\ 0 & i & 0 \\ 2-2i & 2-2i & i+2 \end{pmatrix}$

B Vérifie $P(3)$

C A pour inverse : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2i & 1-i & -1+i \\ 0 & -i & 0 \\ 2-2i & 2-2i & i-2 \end{pmatrix}$

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 λ étant un nombre complexe non nul, en s'inspirant du résultat

$$\frac{1}{1-\frac{a}{\lambda}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^k$$

appliqué aux matrices, on démontre que, A nilpotente d'indice m implique que $A - \lambda I$

A N'est pas inversible

B Est inversible d'inverse $(A - \lambda I_n)^{-1} = -\lambda^{-1} I_n - \lambda^{-2} A - \ldots - \lambda^{-m} A^{m-1}$

C Est nilpotente

D Est la matrice nulle

Problème : Équation différentielle de Bessel
Motivations

L'équation différentielle de *Bessel* joue un rôle important en physique mathématique, où elle intervient, par exemple, dans des problèmes de conduction de la chaleur, d'électromagnétisme, de télécommunication, de mécanique vibratoire, d'astronomie, de mécanique quantique ou encore de diffraction.

L'équation différentielle de *Bessel* joue un rôle fondamental dans les problèmes à symétrie cylindrique.

Les solutions, appelées “fonctions de *Bessel*”, possèdent certaines analogies avec les fonctions trigonométriques, comme leur caractère oscillant.

Il est donc essentiel de connaître et de maîtriser les fondamentaux mathématiques sous-jacents à cette équation.

Notations générales

Dans tout le problème, a est un réel strictement positif et $\mathcal{D}$ est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]\,0\,,\,a\,]$.

Partie 1

Soit $f \in \mathcal{D}$.

On suppose qu'il existe un réel $\gamma \geqslant 0$ tel que $t \in \mathbb{R} \longmapsto t^\gamma f'(t)$ soit intégrable sur l'intervalle $]\,0\,,\,a\,]$.

On suppose qu'il existe un réel $\alpha \geqslant 0$ tel que $t \in \mathbb{R} \longmapsto t^{2\alpha} f'^2(t)$ soit intégrable sur l'intervalle $]\,0\,,\,a\,]$.

Question 7 ♣ Si $\gamma = 0$ alors :

- A $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = +\infty$
- B $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$
- C f est bornée sur $]\,0\,,\,a\,]$
- D $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) \in \mathbb{R}$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Soit $t \in]\,0\,,\,a\,]$. Si $\gamma > 0$ alors :

- A $u \longmapsto u^\gamma f(u)$ est bornée sur $]\,0\,,\,a\,]$
- B $t^\gamma\,|\,f(t)\,| \leqslant a^\gamma\,|\,f(a)\,| + \displaystyle\int_0^a u^\gamma\,|\,f(u)\,|\,du$
- C $t^\gamma\,|\,f(t)\,| \leqslant a^\gamma\,|\,f(a)\,| + \displaystyle\int_0^a u^\gamma\,|\,f'(u)\,|\,du$
- D $t^\gamma\,|\,f(t)\,| \leqslant |\,f(a)\,| + \displaystyle\int_0^a u^\gamma\,|\,f(u)\,|\,du$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+\star}$. Pour cette question, on pourra faire usage de l'intégrale $\displaystyle\int_t^{t_0} u^\gamma\,|\,f'(u)\,|\,du$ où $t_0 \in]\,0\,,\,a\,[$ tel que $\displaystyle\int_0^{t_0} u^\gamma\,|\,f'(u)\,|\,du < \varepsilon$. Si $\gamma > 0$ alors :

- A $t^\gamma\,|\,f(t)\,| \leqslant \varepsilon$
- B $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} t^\gamma f(t) = +\infty$
- C $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} t^\gamma f(t)$ n'existe pas
- D $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} t^\gamma f(t) = 0$

Question 10 Pour cette question, on considère $f : t \longmapsto -\dfrac{\ln(t)}{t}$ et on choisit $\delta \in]\,1\,,\,2[$. On a alors :

- A $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} t^{2-\delta} f(t) = -\infty$
- B $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} t^{\gamma-\delta} f(t) = 0$
- C $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} t^{2-\delta} f(t) = +\infty$
- D $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} t^{2-\delta} f(t)$ n'existe pas

Question 11 Si $\alpha \in \left[0\,,\,\dfrac{1}{2}\right[$ alors :

- A f admet une limite en 0 et on peut déterminer cette valeur limite
- B f' admet une limite en 0 et on ne peut pas déterminer cette valeur limite
- C f n'a pas de limite en 0
- D f admet une limite en 0 et on ne peut pas déterminer cette valeur limite.

Question 12 ♣ Soit $0 < t < t_0 < a$. Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ alors :

- A $\left|\displaystyle\int_t^{t_0} f'(u)\,du\right| \leqslant \sqrt{\dfrac{t^{1-2\alpha}}{2\alpha-1}\displaystyle\int_0^{t_0} u^{2\alpha} f'^2(u)\,du}$
- B $u^{\alpha-\frac{1}{2}} f(u) \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$
- C $\left|\displaystyle\int_t^{t_0} f'(u)\,du\right| \leqslant \sqrt{\dfrac{t^{1-2\alpha}}{2\alpha-1}\displaystyle\int_0^{t_0} u^{2\alpha-1} f'(u)\,du}$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 ♣ Soit $\delta > 0$. Si $\alpha \in [\,0\,,\,+\infty\,[$ alors :

- [A] $t^{\alpha-\frac{1}{2}+\delta}|\,f'(t)\,| \leqslant \frac{1}{2}\left[t^{2\delta-1} + t^{2\alpha}f'^2(t)\right]$
- [B] $t \longmapsto t^{\alpha-\frac{1}{2}+\delta}f(t)$ est intégrable sur l'intervalle $]\,0\,,\,a\,]$
- [C] $t^{\alpha-\frac{1}{2}+\delta}|\,f'(t)\,| \leqslant \frac{1}{2}\left[t^{2\delta-1} + \frac{1}{\delta}t^{2\alpha}f'(t)\right]$
- [D] $t \longmapsto t^{\alpha-\frac{1}{2}+\delta}f'(t)$ est intégrable sur l'intervalle $]\,0\,,\,a\,]$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Partie 2

Dans toute la suite de ce sujet, α est un réel fixé et appartenant à l'intervalle $\left]\,0\,,\,\frac{1}{2}\right[$.

On note par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}$ telles que $t \longmapsto t^{2\alpha}f^2(t)$ soit intégrable sur l'intervalle $]\,0\,,\,a\,]$.

On note par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}$ telles que $t \longmapsto t^{2\alpha-2}f^2(t)$ **et** $t \longmapsto t^{2\alpha}f'^2(t)$ soient toutes deux intégrables sur l'intervalle $]\,0\,,\,a\,]$.

On note par $\mathcal{G}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ défini par la condition supplémentaire $f(a) = 0$ vérifiée pour toute $f \in \mathcal{G}$.

Question 14 ♣ On a :

- [A] $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel
- [B] $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$
- [C] $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ en sont des sous-espaces vectoriels
- [D] $\mathcal{E}$ n'est pas un espace vectoriel
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ On munit $\mathcal{E}$ de la forme bilinéaire $(f, g) \longmapsto (f|g) = \displaystyle\int_0^a t^{2\alpha}f(t)\,g(t)\,dt.$
On peut affirmer que :

- [A] Cette forme bilinéaire est la norme d'un produit vectoriel
- [B] Cette forme bilinéaire n'est pas un produit scalaire
- [C] Cette forme bilinéaire est symétrique
- [D] Cette forme bilinéaire est un produit scalaire.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ Soit $f \in \mathcal{E}$. On note $||\,f\,||$ la norme associée à la forme bilinéaire $(f, g) \longmapsto (f|g)$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à un. On considère la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ des fonctions définies par $f_n(t) = (a-t)t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\alpha}$. On a alors :

- [A] $f_n \in \mathcal{E}$
- [B] $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathcal{E}$
- [C] $f_n \notin \mathcal{E}$
- [D] $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas dans $\mathcal{E}$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 ♣ Soit ρ un réel fixé. Pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, on considère sur $]\,0\,,\,a\,]$ l'équation différentielle :

$$E_\lambda \;:\; y'' + \frac{2\alpha}{t} y' + \left(\lambda - \frac{\rho}{t^2}\right) y = 0.$$

Sans chercher à la résoudre, on suppose qu'elle admet une solution $\psi_\lambda \in \mathcal{F}$.
On considère $t \longmapsto t^{2\alpha+2}\psi_\lambda(t)$. On a alors :

- A $t^{\alpha+1}\psi_\lambda''(t) = \rho t^{\alpha-1}\psi_\lambda(t) - \lambda t^{\alpha+1}\psi_\lambda(t) - 2\alpha t^\alpha \rho\, \psi_\lambda'(t)$
- B $t \longmapsto t^{2\alpha+2}\psi_\lambda(t)$ n'est pas intégrable sur $]\,0\,,\,a\,]$
- C $t \longmapsto t^{2\alpha+2}\psi_\lambda(t)$ est intégrable sur $]\,0\,,\,a\,]$
- D $t^{2\alpha+2}\psi_\lambda''^2(t) \leqslant 4\left(\rho^2 t^{2\alpha-2}\psi_\lambda^2(t) + \lambda^2 t^{2\alpha+2}\psi_\lambda^2(t) + 4\alpha^2 t^{2\alpha}{\psi_\lambda'}^2(t)\right)$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 18 ♣ Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, on pose $\chi = \psi_\lambda' f$. On a alors :

- A $t \longmapsto t^{2\alpha-1}\chi(t)$ est intégrable sur $]\,0\,,\,a\,]$
- B $t \longmapsto t^{2\alpha}\chi'(t)$ est intégrable sur $]\,0\,,\,a\,]$
- C $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} t^{2\alpha}\psi_\lambda'(t) f(t) = 1$
- D $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} t^{2\alpha}\psi_\lambda'(t) f(t) = 0$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 19 Soit μ un réel différent de λ. On suppose que la solution ψ_λ de E_λ appartient en fait à $\mathcal{G}$ et que l'équation E_μ admet une solution $\psi_\mu \in \mathcal{G}$. On a alors :

- A $t^{2\alpha}\psi_\lambda(t)\psi_\mu(t) = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d}{dt}\left(t^{2\alpha}\left(\psi_\lambda(t)\psi_\mu'(t) - \psi_\mu(t)\psi_\lambda'(t)\right)\right)$
- B $t^{2\alpha}\psi_\lambda(t)\psi_\mu(t) = \dfrac{1}{\mu-\lambda}\dfrac{d}{dt}\left(t^{2\alpha}\left(\psi_\lambda(t)\psi_\mu'(t) - \psi_\mu(t)\psi_\lambda'(t)\right)\right)$
- C $t^{2\alpha}\psi_\lambda(t)\psi_\mu(t) = (\lambda-\mu)\dfrac{d}{dt}\left(t^{2\alpha}\left(\psi_\lambda(t)\psi_\mu''(t) - \psi_\mu(t)\psi_\lambda''(t)\right)\right)$
- D $t^{2\alpha}\psi_\lambda(t)\psi_\mu(t) = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{d}{dt}\left(t^{2\alpha}\left(\psi_\lambda(t)\psi_\mu'(t) - \psi_\mu(t)\psi_\lambda'(t)\right)\right)$

Question 20 ♣ Soit μ un réel différent de λ. On suppose que la solution ψ_λ de E_λ appartient à $\mathcal{G}$ et que l'équation E_μ admet une solution $\psi_\mu \in \mathcal{G}$. Soient r et s deux réels. On note par $\delta_{r\,s}$ le symbole de *Kronecker* qui vaut 1 si $r = s$ et qui vaut 0 si $r \neq s$. On a alors :

- A $(\psi_\mu|\psi_\lambda) = \dfrac{1}{\mu-\lambda}\left[t^{2\alpha}\left(\psi_\lambda(t)\psi_\mu'(t) - \psi_\mu(t)\psi_\lambda'(t)\right)\right]_0^a$
- B $(\psi_\mu|\psi_\lambda) = 1$
- C $(\psi_\mu|\psi_\lambda) = 0$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Partie 3

On suppose désormais que $a = \pi$ et que $\rho = \alpha - \alpha^2$, avec toujours $t \in \left]\,0\,,\,\dfrac{1}{2}\,\right[$.

Question 21 On note par θ les fonctions, sans zéro, à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ telles que le changement d'inconnue $y = \theta z$ remplace l'équation différentielle E_λ par une autre équation différentielle vérifiée par z. L'équation différentielle en z est :

A $\theta\, z'' + \left(\theta' + \dfrac{\alpha\,\theta}{t}\right) z' + \left[\theta'' + \dfrac{2\alpha\,\theta'}{t} + \left(\lambda - \dfrac{1-\alpha}{t^2}\right)\theta\right] z = \lambda$

B $\theta\, z'' + \left(\theta' + \dfrac{\alpha\,\theta}{t}\right) z' + \left[\theta'' + \dfrac{2\alpha\,\theta'}{t} + \left(\lambda - \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{t^2}\right)\theta\right] z = \alpha t$

C $\theta\, z'' + 2\left(\theta' + \dfrac{\alpha\,\theta}{t}\right) z' + \left[\theta'' + \dfrac{2\alpha\,\theta'}{t} + \left(\lambda - \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{t^2}\right)\theta\right] z = 0$

D $\theta\, z'' + 2\left(\theta' + \dfrac{\alpha\,\theta}{t}\right) z' + \left[\theta'' + \dfrac{2\alpha\,\theta'}{t} + \left(\lambda - \dfrac{\alpha^2(1-\alpha)}{t^4}\right)\theta\right] z = 0$

Question 22 ♣ On souhaite que l'équation différentielle vérifiée par z soit linéaire, à coefficients constants et sans terme en z'. Pour cela, on note :

$$A = \frac{\theta'}{\theta} + \frac{\alpha}{t} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{\theta}\left(\theta'' + \frac{2\alpha\,\theta'}{t} + \left(\lambda - \frac{\alpha-\alpha^2}{t^2}\right)\theta\right)$$

Soit $\nu \in \mathbb{R}$ On a alors :

A $\theta(t) = \nu\, t^{-\alpha}\, e^{At}$

B $\theta : t \longmapsto t^{\alpha^2}$

C $\theta : t \longmapsto t^{-\alpha}$

D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 23 ♣ On souhaite intégrer l'équation différentielle E_λ. On fait le choix de poser $\theta : t \longmapsto t^{-\alpha}$. On impose que les solutions $y \in \mathcal{F}$. On pose $\lambda > 0$, et on considère b un nombre réel. On a alors :

A L'intégrabilité de $t^{2\alpha-2}y^2(t)$ n'est assurée que si $\sqrt{\lambda}\, t_0 \equiv 0\ [\pi]$

B $y(t) = bt^{-\alpha}\sin\left(\sqrt{\lambda}(t-t_0)\right)$

C L'intégrabilité de $t^{2\alpha-2}y^2(t)$ n'est assurée que si $\sqrt{\lambda}\, t_0 \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

D $y(t) = bt^{-2\alpha}\sin\left(\lambda\sqrt{\lambda}t\right)$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 24 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $\varphi_n : t \longmapsto \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}t^{-\alpha}\sin(nt)$. Avec $\varphi_n \in \mathcal{G}$. On considère la suite orthonormale $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$. On considère la fonction $f \in \mathcal{E}$ définie par $f(t) = t^{-\alpha}$. Puis, $\forall n \geqslant 1$, on pose $\widehat{f_n} = (f|\varphi_n)$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a alors :

A $\widehat{f_n} = \begin{cases} \widehat{f_n} = 0 & \text{si } n = 2p \\ \widehat{f_n} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(2p+1)^2 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

B $\widehat{f_n} = \begin{cases} \widehat{f_n} = 0 & \text{si } n = 2p \\ \widehat{f_n} = \sqrt{2\pi}\dfrac{1}{2p+1} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

C $\widehat{f_n} = \begin{cases} \widehat{f_n} = 0 & \text{si } n = 2p \\ \widehat{f_n} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{2}{2p+1} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

D $\widehat{f_n} = \begin{cases} \widehat{f_n} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}p^2 & \text{si } n = 2p \\ \widehat{f_n} = 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

Question 25 ♣ On note par S la série $\sum_{n\geqslant 1} \widehat{f}_n \varphi_n$. Dans ce cas :

- A La série S converge uniformément sur $]\,0\,,\,\pi\,[$
- B La série S converge vers f au sens de la norme de $\mathcal{E}$
- C La série S converge simplement sur $]\,0\,,\,\pi\,[$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 26 On considère la fonction $g \in \mathcal{G}$ définie par $g(t) = t^{-2\alpha}$. Puis, $\forall n \geqslant 1$, on pose $\widehat{g}_n = (g|\varphi_n)$. On a alors :

- A $\widehat{g}_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{1+\alpha}}\,du\right) n^{\alpha+1}$
- B $\widehat{g}_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{1+\alpha}}\,du\right) \sqrt{n}^{\,\alpha}$
- C $\widehat{g}_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{1+\alpha}}\,du\right) n^{\alpha}$
- D $\widehat{g}_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{1+\alpha}}\,du\right) n^{\alpha-1}\alpha$

Question 27 ♣ On a :

- A La série de terme général $\widehat{g}_n$ diverge
- B La série de terme général $\widehat{g}_n$ converge
- C La série de terme général $\widehat{g}_n^2$ converge
- D La série de terme général $\widehat{g}_n^2$ diverge
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 28 ♣ On considère une série absolument convergente de terme général réel γ_n, avec $n \in \mathbb{N}^\star$. On note par S_γ la série $\left(\sum \gamma_n \varphi_n\right)_{n\geqslant 1}$. Dans ce cas :

- A La série S_γ converge uniformément sur $]\,0\,,\,\pi\,[$
- B La série S_γ converge simplement sur $]\,0\,,\,\pi\,[$
- C La série S_γ converge normalement sur $\left[\frac{\pi}{2}-1\,,\,\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\right]$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 29 On note par k la somme de la série $S_\gamma = \left(\sum \gamma_n \varphi_n\right)_{n\geqslant 1}$. On cherche les solutions, sur $]\,0\,,\,\pi\,[$, de l'équation différentielle :

$$E\ :\ y'' + \frac{2\alpha}{t}y' - \frac{\alpha-\alpha^2}{t^2}y = k$$

Les solutions de E recherchées appartiennent à l'ensemble $\mathcal{G}$. On suppose qu'il existe une fonction $h = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \varphi_n$, où $\beta_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, qui soit solution de E sur $]\,0\,,\,\pi\,[$. On admet que h' et h'' peuvent être obtenues par dérivation, terme à terme, de l'expression de la série exprimant h. On a :

- A $\beta_n = \left(\frac{\gamma_n}{n}\right)^2$
- B $\beta_n = n^2\gamma_n$
- C $\beta_n = -\frac{\pi}{n}\gamma_n$
- D $\beta_n = -\frac{1}{n^2}\gamma_n$

Question 30 On a:

- A $|\,\varphi_n''(t)\,| \leqslant \mathcal{O}(n)$
- B $|\,\varphi_n''(t)\,| \leqslant \mathcal{O}(n^2)$
- C $|\,\varphi_n''(t)\,| \leqslant \mathcal{O}(n)$
- D $|\,\varphi_n''(t)\,| \leqslant \mathcal{O}(1)$

FIN DU SUJET

Feuille de réponses de MATHÉMATIQUES

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

Codez votre numéro de candidat ci-contre chiffre par chiffre en noircissant les cases (comme ceci ■), puis complétez l'encadré.

NOM - Prénom(s) : ....

Numéro de candidat : ....

Centre d'examen : ....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D E
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B C D E
Question 18 : A B C D E
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D E
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D E
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D