Concours Enginius

Épreuve de PHYSIQUE

Session 2022

Informations sur le sujet de l'épreuve

Durée de l'épreuve :	45 minutes
Épreuve notée sur :	20 points
Document(s) autorisé(s) :	☐ oui ☒ non
Calculatrice autorisée :	☐ oui ☒ non

Remarques

Le sujet est constitué de deux exercices et un problème indépendants.

Pour chaque question de l'épreuve, veuillez noircir (comme ceci ■) la (les) bonne(s) réponse(s) sur la feuille de réponse ci-jointe.

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent avoir une ou plusieurs bonnes réponses.

Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.

Uniquement les feuilles de réponses correctement remplies seront corrigées.

Début du sujet sur la page suivante

Exercice 1
Onde acoustique dans un pavillon sonore

Soit $t \geqslant 0$ le paramètre temporel. Un pavillon de révolution, d'axe central Ox, possède une section circulaire variable, qui à l'abscisse x, est notée $S(x)$. La situation considérée est représentée (non à l'échelle des dimensions) par la figure suivante :

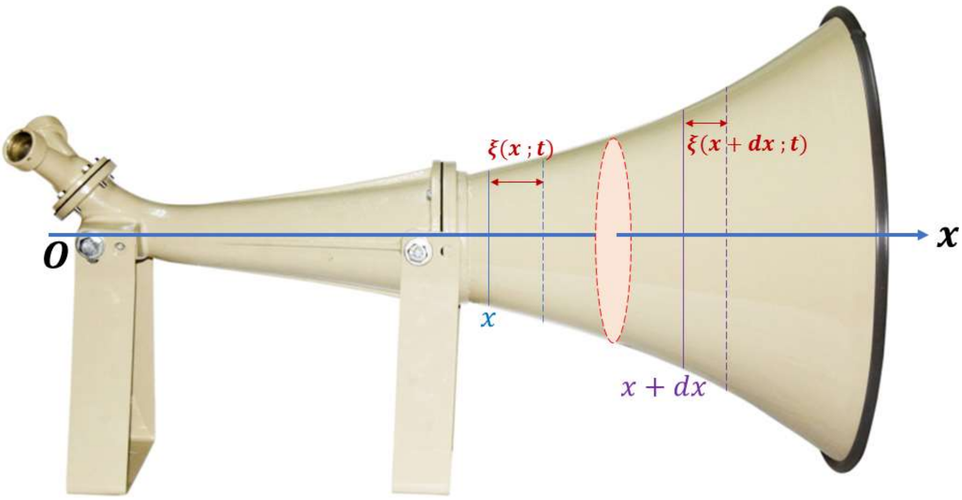

Figure 1: Représentation non à l'échelle, à l'instant t, du pavillon acoustique étudié

A l'équilibre, la tranche de fluide, supposée homogène, qui se trouve entre les abscisses x et $x + dx$ a une masse volumique ρ_0 et la pression régnante est P_0. A l'instant t, cette même masse de fluide se trouve entre les abscisses $x + \xi(x\,;\,t)$ et $x + dx + \xi(x + dx\,;\,t)$.

On note par V un volume de ce fluide, par P sa pression et $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0\,\chi_S}}$ est un coefficient réel, strictement positif, qui a les dimensions d'une vitesse.

La condition de linéarité de l'étude, à savoir $\forall(x\,;\,t) \in {\mathbb{R}^+}^2$, $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x\,;\,t) \ll 1$, conduit à **négliger tout terme d'ordre supérieur ou égal à deux**.

Question 1 La variation relative de volume, appelée *dilatation*, est notée δ. Son expression est donnée par :

A $\delta = \dfrac{\xi}{S}\dfrac{\partial S}{\partial x}$ B $\delta = \dfrac{1}{S}\dfrac{\partial (S\xi)}{\partial x}$ C $\delta = \dfrac{\partial S}{\partial x}$ D $\delta = \dfrac{1}{S}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

Question 2 Les transformations du fluide sont supposées adiabatiques et réversibles. Le coefficient de compressibilité isentropique est $\chi_S = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_S$. On note par $p(x\,;\,t) = P(x\,;\,t) - P_0$ la surpression. L'expression de la surpression est donnée par :

A $p = -\dfrac{1}{\chi_S S}\dfrac{\partial (S\xi)}{\partial x}$

B $p = \dfrac{1}{\chi_S S}\dfrac{\partial (S\xi)}{\partial x}$

C $p = \dfrac{1}{\chi_S}\dfrac{\partial (S\xi)}{\partial x}$

D $p = \dfrac{1}{\chi_S S}\dfrac{\partial (\xi)}{\partial x}$

Question 3 La Relation Fondamentale de la Dynamique appliquée à la tranche de fluide considérée conduit à l'équation :

A $\rho_0\dfrac{\partial \xi}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$ B $\rho_0\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$ C $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$ D $\rho_0\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dfrac{\partial p}{\partial x}$

Question 4 L'équation, aux dérivées partielles, vérifiée par la grandeur $\xi(x\,;\,t)$ est :

A $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\xi\,\dfrac{d\ln(S)}{dx}\right) = 0$

C $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\xi\,\dfrac{d\ln(S)}{dx}\right) = 0$

B $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\xi\,\dfrac{d\ln(S)}{dx}\right) = 0$

D $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\xi\,\dfrac{d\ln(S)}{dx}\right) = 0$

Question 5 L'équation, aux dérivées partielles, vérifiée par la surpression $p(x\,;\,t)$ est :

A $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dfrac{d\ln(S)}{dx} \times \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$

C $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dfrac{dS}{dx} \times \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$

B $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dfrac{d\ln(S)}{dx} \times \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$

D $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dfrac{d\ln(S)}{dx} \times \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$

Question 6 A présent le pavillon est dit "exponentiel", ainsi on pose $S(x) = S_0\,e^{ax}$ avec S_0 et a qui sont deux réels strictement positifs. L'équation, aux dérivées partielles, vérifiée par la grandeur $\xi(x\,;\,t)$ est :

A $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0$

C $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0$

B $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \dfrac{a^2}{S_0^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0$

D $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - c^2\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0$

Question 7 On pose $i^2 = -1$. Pour l'équation de la question précédente, on recherche des solutions propagatives de forme harmonique. On pose alors $\xi = \Re\text{é}(\Xi)$, avec $\Xi(x\,;\,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$. Ainsi ξ est la partie réelle de la solution complexe Ξ. Le terme d'amplitude A est une constante réelle strictement positive, $k = \Re\text{é}(k) + i\,\Im m(k)$ est le nombre d'onde (donc $k \in \mathbb{C}$) et $\omega \in \mathbb{R}^{+\star}$ la pulsation associée.

A $\dfrac{\omega^2}{c^2} - k + i\,k^2 a = 0$

C $\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 + i\,ka = 0$

B $\dfrac{\omega}{c^2} - k + i\,ka = 0$

D $\dfrac{\omega}{c} - k^2 + i\,ka = 0$

Question 8 **Aucune propagation n'est possible** lorsque ω est strictement inférieure à une pulsation dite de *coupure*, et notée ω_c. L'expression de la pulsation de coupure est donnée par l'expression :

A $\omega_c = 2ac$ B $\omega_c = ac$ C $\omega_c = \sqrt{ac}$ D $\omega_c = \dfrac{ac}{2}$

Question 9 **On se place dans le cas où $\omega > \omega_c$.** L'expression du déplacement local de fluide $\xi(x\,;\,t)$ est :

A $\xi(x\,;\,t) = A\,e^{-\frac{1}{2}ax}\cos\left(\dfrac{\omega x}{c}\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2} - \omega t\right)$

B $\xi(x\,;\,t) = A\,e^{\frac{1}{2}ax}\cos\left(\dfrac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2} + \omega t\right)$

C $\xi(x\,;\,t) = A\,e^{-\frac{1}{2}ax}\cos\left(\dfrac{\omega x}{c}\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2} - \omega t\right)$

D $\xi(x\,;\,t) = A\,e^{-\frac{1}{2}ax}\cos\left(\dfrac{\omega x}{c}\sqrt{1-\dfrac{\omega_c}{\omega}} - \omega t\right)$

Question 10 ♣ La vitesse de phase, notée v_φ, qui est associée à ces ondes acoustiques est définie par l'expression $v_\varphi = \dfrac{\omega}{\Re\text{é}(k)}$.
La vitesse de groupe, notée v_g, qui est associée à ces ondes acoustiques est définie par l'expression $v_g = \dfrac{d\,\omega}{d\,(\Re\text{é}(k))}$.
L'expression de la vitesse de groupe est :

- [A] $v_g = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$
- [B] $v_g = \dfrac{c^2}{v_\varphi}$
- [C] $v_g = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 2

Propagation thermique en milieu semi-infini

Soit $t \geqslant 0$ le paramètre temporel. Un milieu homogène, isotrope, considéré comme semi-infini, occupe tout le demi-espace défini par $x \geqslant 0$.

Ce milieu semi-infini a une masse volumique constante ρ et sa capacité thermique massique est supposée elle aussi constante, et sera notée c. On note par $D = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ le coefficient de diffusion thermique.

Initialement, ce milieu est isolé thermiquement et en équilibre à la température T_0.

A partir de l'instant $t = 0$, sa surface libre est soumise à un flux thermique constant, dirigé intégralement suivant Ox. Ce flux thermique correspond à un vecteur densité de courant de chaleur $\vec{J}$, tel que $\vec{J}(x=0\,;\,t) = J_0\,\vec{u}_x$, avec J_0 qui est indépendant du temps et $||\,\vec{u}_x\,|| = 1$.

Les échanges thermiques imposent une conduction thermique unidirectionnelle suivant Ox de la chaleur dans le milieu. Ce milieu est caractérisé par une conductivité thermique notée $\lambda \in \mathbb{R}^+$. La situation considérée est représentée sur la figure suivante :
La modélisation mathématique de la conduction thermique s'effectue par le biais de la loi de *Fourier*.

Les conditions aux limites et initiales associées à cette situation physique sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = 0,\ \forall t > 0 & : \quad \vec{J}(0\,;\,t) = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}(0\,;\,t)\,\vec{u}_x = J_0\,\vec{u}_x \\[2ex] \forall x > 0,\ t = 0 & : \quad T(x\,;\,0) = T_0 \end{cases}$$

On rappelle que le vecteur densité de courant de chaleur $\vec{J}$ est un champ vectoriel dont le flux, à travers une surface fermée, est égal à la puissance thermique qui sort de cette surface fermée.
Question 11 L'équation de propagation du champ de température est donnée par :

- [A] $D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{\partial T}{\partial t}$
- [B] $D\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial t}$
- [C] $D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2}$
- [D] $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = D\dfrac{\partial T}{\partial t}$

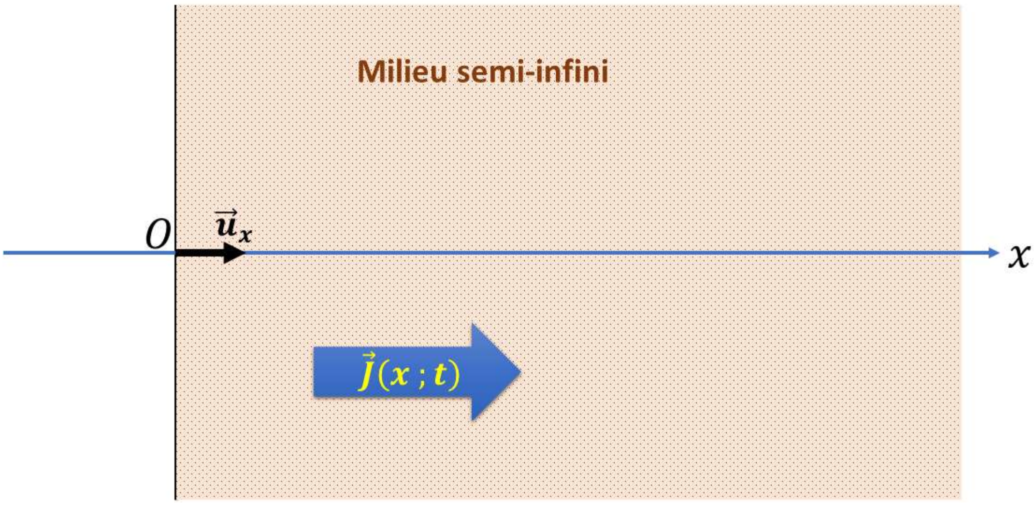

Figure 2: Représentation non à l'échelle, à l'instant t, du milieu étudié

Question 12 On a, $\forall x > 0$, $t = 0$, le terme $J(x\,;0)$ qui vaut :

A $J(x\,;0) = \lambda \dfrac{T_0}{x}$

B $J(x\,;0) = 0$

C $J(x\,;0) = -xDT_0$

D $J(x\,;0) = -\lambda \dfrac{T_0}{x}$

Question 13 La densité de courant de chaleur satisfait à l'équation, aux dérivées partielles, suivante :

A $\dfrac{\partial^2 J}{\partial x^2} = D\dfrac{\partial J}{\partial t}$

B $D\dfrac{\partial J}{\partial x} = \dfrac{\partial J}{\partial t}$

C $D\dfrac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \dfrac{\partial J}{\partial t}$

D $D\dfrac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 J}{\partial t^2}$

Question 14 Soit a et b, deux nombres réels. Avec les nouvelles variables $x' = ax$ et $t' = bt$, la quantité $J(x\,;t)$ devient $J'(x'\,;t')$. Pour que $J(x\,;t)$ et $J'(x'\,;t')$ satisfassent à la même équation aux dérivées partielles, on doit avoir:

A $b = a^2$

B $b = \dfrac{1}{a}$

C $b = \sqrt{a}$

D $b = a\sqrt{2}$

Question 15 On pose la nouvelle variable $u = A\dfrac{x}{\sqrt{t}}$ où A est une constante réelle arbitraire. On recherche des solutions de la forme $J(x\,;t) = \alpha\, f(u)$. Avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$. L'équation différentielle vérifiée par f est :

A $\dfrac{2DA^2}{u}\dfrac{d^2 f}{du^2}(u) + u\,\dfrac{d\,f}{du}(u) = 0$

B $2DA^2\dfrac{d^2 f}{du^2}(u) - u^2\,\dfrac{d\,f}{du}(u) = 0$

C $A^2\dfrac{d^2 f}{du^2}(u) + u\,\dfrac{d\,f}{du}(u) = 0$

D $2DA^2\dfrac{d^2 f}{du^2}(u) + u\,\dfrac{d\,f}{du}(u) = 0$

Question 16 Soit $K \in \mathbb{R}$. On a :

A $\dfrac{d\,f}{du}(u) = Ke^{-\frac{u}{DA}}$

B $\dfrac{d\,f}{du}(u) = Ke^{-\frac{u}{4DA^2}}$

C $\dfrac{d\,f}{du}(u) = Ke^{-\frac{u^2}{4DA^2}}$

D $\dfrac{d\,f}{du}(u) = Ke^{-\frac{u^2}{2DA^2}}$

Question 17 On pose $A = \dfrac{1}{2\sqrt{D}}$. Ceci permet d'obtenir une variable $u = A\dfrac{x}{\sqrt{t}} = \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$ qui est sans dimension.

- [A] $f(u) = 1 + K\int_0^u e^{-y}\,dy$
- [B] $f(u) = K\int_0^u e^{-y^2}\,dy$
- [C] $f(u) = u + K\int_0^u e^{-y^2}\,dy$
- [D] $f(u) = 1 + K\int_0^u e^{-y^2}\,dy$

Question 18 On rappelle un résultat élémentaire de l'Analyse mathématique :

$$\lim_{u \longrightarrow +\infty} \int_0^u e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- [A] $K = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$
- [B] $K = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$
- [C] $K = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$
- [D] $K = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Question 19 L'expression de la densité de courant de chaleur $J(x\,;\,t)$ est :

- [A] $J(x\,;\,t) = J_0\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}\,dy\right)$
- [B] $J(x\,;\,t) = J_0\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2Dt}} e^{-y^2}\,dy\right)$
- [C] $J(x\,;\,t) = J_0\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2Dt}}} e^{-y^2}\,dy\right)$
- [D] $J(x\,;\,t) = J_0\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}\,dy\right)$

Question 20 L'expression de la température $T(x\,;\,t)$ est :

- [A] $T(x\,;\,t) = T_0 + \dfrac{2J_0}{\lambda}\sqrt{Dt}\left(\dfrac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\pi^2} - \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}f\left(\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)$
- [B] $T(x\,;\,t) = T_0 + \dfrac{\pi\lambda^2}{2J_0}\sqrt{Dt}\left(\dfrac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{\pi}} - \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}f\left(\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)$
- [C] $T(x\,;\,t) = T_0 + \dfrac{2J_0}{\lambda}\sqrt{Dt}\left(\dfrac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{\pi}} - \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}f\left(\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)$
- [D] $T(x\,;\,t) = T_0 + \dfrac{2}{\lambda J_0}\sqrt{Dt}\left(\dfrac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{\pi}} - \dfrac{x^2}{4Dt}f\left(\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)$

FIN DU SUJET

Feuille de réponses de PHYSIQUE

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

Codez votre numéro de candidat ci-contre chiffre par chiffre en noircissant les cases (comme ceci ■), puis complétez l'encadré.

NOM - Prénom(s) : ....

Numéro de candidat : ....

Centre d'examen : ....

QUESTION 1 : A B C D
QUESTION 2 : A B C D
QUESTION 3 : A B C D
QUESTION 4 : A B C D
QUESTION 5 : A B C D
QUESTION 6 : A B C D
QUESTION 7 : A B C D
QUESTION 8 : A B C D
QUESTION 9 : A B C D
QUESTION 10 : A B C D
QUESTION 11 : A B C D
QUESTION 12 : A B C D
QUESTION 13 : A B C D
QUESTION 14 : A B C D
QUESTION 15 : A B C D
QUESTION 16 : A B C D
QUESTION 17 : A B C D
QUESTION 18 : A B C D
QUESTION 19 : A B C D
QUESTION 20 : A B C D