Concours Enginius

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Session 2024

Informations sur le sujet de l'épreuve

Durée de l'épreuve :	1h30
Épreuve notée sur :	20 points
Document(s) autorisé(s) :	☐ oui ☒ non
Calculatrice autorisée :	☐ oui ☒ non

Remarques

Le sujet est constitué cinq exercices indépendants.

Pour chaque question de l'épreuve, veuillez noircir (comme ceci ■) la (les) bonne(s) réponse(s) sur la feuille de réponse ci-jointe.

Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent avoir une ou plusieurs bonnes réponses.

Uniquement les feuilles de réponses correctement remplies seront corrigées.

Début du sujet sur la page suivante

Exercice 1

Question 1 Soient a_1, a_2 et a_3 trois réels tels que $\sum_{k=1}^{3} \cos(a_k) = \sum_{k=1}^{3} \sin(a_k) = 0$.

- [A] $\sum_{k=1}^{3} e^{3ia_k} = 0$
- [B] $\sum_{k=1}^{3} e^{2ia_k} = 0$
- [C] *Aucune des réponses proposées n'est correcte*
- [D] $\prod_{k=1}^{3} e^{3ia_k} = 0$
- [E] $\prod_{k=1}^{3} e^{2ia_k} = 0$

Exercice 2

On considère les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 8z^4 + 8z^3 - z - 1 = 0 \ : \ (E) \\ \\ 8\sin^3(\alpha) - 2\sin(\alpha)\sin(3\alpha) - \sin(\alpha) - 3\cos(2\alpha) + 2 = 0 \ : \ (E'). \end{cases}$$

Question 2 L'ensemble de solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) est :

- [A] $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ -1 \, , -\frac{1}{2} \, , \frac{1}{4}\big(-1 \pm i\sqrt{3}\big) \right\}$
- [B] *Aucune des réponses proposées n'est correcte*
- [C] $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ -1 \, , \frac{1}{2} \, , \frac{1}{2}\big(-1 \pm i\sqrt{3}\big) \right\}$
- [D] $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ -1 \, , \frac{1}{2} \, , \frac{1}{2}\big(-1 \pm i\sqrt{3}\big) \right\}$
- [E] $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ -1 \, , \frac{1}{2} \, , \frac{1}{4}\big(-1 \pm i\sqrt{3}\big) \right\}$

Question 3 L'ensemble de solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) est :

- [A] $\mathcal{S}_{(E')} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \, , \frac{\pi}{3} + k\pi \, , \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$, où $k \in \mathbb{Z}$
- [B] $\mathcal{S}_{(E')} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \, , \frac{\pi}{3} + 2k\pi \, , \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$, où $k \in \mathbb{Z}$
- [C] $\mathcal{S}_{(E')} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \, , \frac{3\pi}{2} + k\pi \right\}$, où $k \in \mathbb{Z}$
- [D] $\mathcal{S}_{(E')} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi \, , \frac{\pi}{6} + k\pi \, , \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\}$, où $k \in \mathbb{Z}$
- [E] *Aucune des réponses proposées n'est correcte*

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soit $\mathcal{P}_n : z \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} z^k$, où $z \in \mathbb{C}$.

Question 4 Pour $z = 1$

- [A] *Aucune des réponses proposées n'est correcte*
- [B] $\mathcal{P}_n(z) = 1$
- [C] $\mathcal{P}_n(z) = n$
- [D] $\mathcal{P}_n(z) = n - 1$
- [E] $\mathcal{P}_n(z) = n + 1$

Question 5 Pour tout $z \neq 1$

- [A] $\mathcal{P}_n(z) = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$
- [B] $\mathcal{P}_n(z) = \dfrac{1 - z^{n-1}}{1 - z}$
- [C] *Aucune des réponses proposées n'est correcte*
- [D] $\mathcal{P}_n(z) = \dfrac{1 - z^{n-1}}{z - 1}$
- [E] $\mathcal{P}_n(z) = \dfrac{1 - z^{n+1}}{z - 1}$

Question 6 Pour tout $z \in \mathbb{C}$

- [A] $\mathcal{P}_n(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n-1}}\right)$
- [B] $\mathcal{P}_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$
- [C] $\mathcal{P}_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(z - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$
- [D] *Aucune des réponses proposées n'est correcte*
- [E] $\mathcal{P}_n(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$

Question 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose $\mathcal{U}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$. Déduire, des questions précédentes, l'expression de $\mathcal{U}_n$ en fonction de n :

- [A] *Aucune des réponses proposées n'est correcte*
- [B] $\mathcal{U}_n = \dfrac{n-1}{2^n}$
- [C] $\mathcal{U}_n = \dfrac{n-1}{2}$
- [D] $\mathcal{U}_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$
- [E] $\mathcal{U}_n = \dfrac{n}{2}$

Exercice 4

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{S}_m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{m^2} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Question 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

A $2\big(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\big) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)$

B $2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\big(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\big)$

C $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

D $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

E *Aucune des réponses proposées n'est correcte*

Question 9 En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

A $m < \mathcal{S}_m < \sqrt{m^2+1} - 1$

B $\sqrt{m^2+1} - 1 < \mathcal{S}_m < m$

C $\sqrt{m} - \sqrt{m-1} < \mathcal{S}_m < \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$

D *Aucune des réponses proposées n'est correcte*

E $\sqrt{m^2+1} < \mathcal{S}_m < m - 1$

Question 10 En déduire la partie entière de $\mathcal{S}_m$

A $E\big(\mathcal{S}_m\big) = m$

B *Aucune des réponses proposées n'est correcte*

C $E\big(\mathcal{S}_m\big) = 0$

D $E\big(\mathcal{S}_m\big) = \sqrt{m^2+1}$

E $E\big(\mathcal{S}_m\big) = m - 1$

Exercice 5

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\; z_{n+1} = \frac{z_n - i}{2z_n + 1}\,.$$

Question 11 On note λ et μ les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z = \dfrac{z-i}{2z+1}$. On a :

A $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $\mu = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

B $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\mu = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

C $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

D $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $\mu = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 On suppose que $z_0 \neq \lambda$, $z_0 \neq \mu$ et que $2z_n + 1 \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose $u_n = \dfrac{z_n - \mu}{z_n - \lambda}$

- A *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- B La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = i - 1$
- C La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}(3i - 1)$
- D La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}(2i - 1)$
- E La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 1 - i$

Question 13 En déduire des questions précédentes que :

- A *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- B la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\sqrt{2}\, i)$
- C la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{2}(i - 1)$
- D la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{2}(1 - i)$
- E la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

Exercice 6

Soit $x \in [-\pi, \pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{S}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2(k+1)}$.

Question 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- A $\left|\mathcal{S}_n(x)\right| \leq \dfrac{n-1}{n+1}$
- B $\left|\mathcal{S}_n(x)\right| \leq \dfrac{n}{n+1}$
- C $\left|\mathcal{S}_n(x)\right| \leq \dfrac{n-1}{n^2(n+1)}$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- E $\left|\mathcal{S}_n(x)\right| \leq \dfrac{n}{n^2+1}$

Question 15 Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

- A $\left|\mathcal{S}_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{2}\big(x + \sin(x)\big)$
- B $\left|\mathcal{S}_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{2}\big(|x| - |\sin(x)|\big)$
- C $\left|\mathcal{S}_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{2}\big(\sin(x) - x\big)$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- E $\left|\mathcal{S}_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{2}\big(|x| + |\sin(x)|\big)$

Question 16 La suite de fonctions $x \longmapsto \mathcal{S}_n(x)$ converge vers une limite que l'on notera $\mathcal{S}$. La fonction limite $x \longmapsto \mathcal{S}(x)$ vérifie pour tout $x \in [-\pi, 0[\cup]0, \pi]$:

- A $\left|\mathcal{S}(x)\right| \leq |x|$
- B $\left|\mathcal{S}(x)\right| \leq \dfrac{|x|}{2}$
- C *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- D $\left|\mathcal{S}(x)\right| \leq |\sin(x)|$
- E $\left|\mathcal{S}(x)\right| \leq \dfrac{|\sin(x)|}{2}$

Question 17 ♣ On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de premier terme $u_0 \in [-\pi, \pi]$, définie par la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathcal{S}(u_n)$.

- A La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
- B La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- C La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
- D La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 7

Soit $x \in [-\pi, \pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{S}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2(k+1)}$

Question 18 Pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$

- A *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- B $-1 \leq f(x+h) \leq \dfrac{h^2}{2} + h\, f(x) + f'(x)$
- C $-1 \leq f(x+h) \leq \dfrac{h^2}{2} + h\, f'(x) + f''(x)$
- D $-1 \leq f(x+h) \leq \dfrac{h^2}{2} + h\, f'(x) + f(x)$
- E $0 \leq f(x+h) \leq \dfrac{h^2}{2} + h\, f'(x) + f''(x)$

Question 19 Pour tout $x \in \mathbb{R}$

- A $|f'(x)| \leq \sqrt{2\big(1 - f(x)\big)}$
- B $|f'(x)| \leq \sqrt{2\big(1 + f(x)\big)}$
- C *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- D $|f'(x)| \leq 1$
- E $|f'(x)| \leq 2\big(1 - f(x)\big)$

Exercice 8

On considère l'intégrale $\mathcal{L}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$

- A $(n+1)\, \mathcal{L}_{n+2} = (n+2)\, \mathcal{L}_{n+1}$
- B $\mathcal{L}_{n+2} = (n+2)\, \mathcal{L}_{n+1}$
- C $(n+2)\, \mathcal{L}_{n+2} = (n+1)\, \mathcal{L}_{n+1}$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- E $\mathcal{L}_{n+2} = (n+1)\, \mathcal{L}_{n+1}$

Question 21 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit $2\,(n+1)\, \mathcal{L}_{n+1}\, \mathcal{L}_n$ vaut :

- A 3π
- B 2π
- C π
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- E $\dfrac{\pi}{2}$

Question 22 Pour tout $n \in \mathbb{N}$

- A $\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{\mathcal{L}_n}{\mathcal{L}_{n+1}} \leq 1$
- B $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{\mathcal{L}_n}{\mathcal{L}_{n+1}} \leq 1$
- C $\frac{n^2+1}{n^2+2} \leq \frac{\mathcal{L}_{n+1}}{\mathcal{L}_n} \leq 1$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- E $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{\mathcal{L}_{n+1}}{\mathcal{L}_n} \leq 1$

Question 23 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ La suite $(\sqrt{n}\mathcal{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers :

- A 1
- B 0
- C $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$
- D $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 9

On considère les deux matrices $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d sont des réels. On note γ et μ respectivement la trace et le déterminant de la matrice $\mathcal{A}$.

Question 24 Le déterminant de la matrice $\mathcal{M}$ est donné par :

- A $det\,(\mathcal{M}) = \mu\,\gamma$
- B $det\,(\mathcal{M}) = 4\,\mu\,\gamma^2$
- C $det\,(\mathcal{M}) = \mu + \gamma$
- D $det\,(\mathcal{M}) = 4\,\mu^2\,\gamma$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 25 La matrice $\mathcal{M}$ est inversible si et seulement si :

- A *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- B la matrice $\mathcal{A}$ n'est pas inversible
- C la matrice $\mathcal{A}$ est inversible ou sa trace est non nulle
- D la matrice $\mathcal{A}$ est inversible

Exercice 10

Question 26 Soient A, B et C des matrices quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

- A $(AB - BA)^2\,C - C^2\,(AB - BA) = 0$
- B $(AB - BA)^2\,C^2 - C\,(AB - BA) = 0$
- C *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- D $(AB - BA)^2\,C + C\,(AB - BA)^2 = 0$
- E $(AB - BA)^2\,C - C\,(AB - BA)^2 = 0$

Exercice 11

Question 27 ♣ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- A La matrice a trois valeurs propres réelles distinctes.
- B La matrice A est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- C La matrice A est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
- D La matrice A est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 12

On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les zéros du polynôme $P = X^4 - X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}$ et on pose

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{4} \frac{z_i^3 + 2}{(z_i^2 - 1)^2}.$$

Question 28 La D.E.S (Décomposition en éléments simples), dans $\mathbb{C}$, de la fraction rationnelle $F : X \longmapsto \dfrac{X^3 + 2}{(X^2 - 1)^2}$ est donnée par :

- [A] $F(X) = -\dfrac{3}{4(X-1)^2} + \dfrac{1}{4(X+1)^2} - \dfrac{1}{X+1}$
- [B] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- [C] $F(X) = \dfrac{3}{4(X-1)^2} - \dfrac{1}{4(X+1)^2} - \dfrac{1}{X+1}$
- [D] $F(X) = \dfrac{3}{4(X-1)^2} + \dfrac{1}{4(X+1)^2} - \dfrac{1}{X+1}$
- [E] $F(X) = \dfrac{3}{4(X-1)^2} + \dfrac{1}{4(X+1)^2} + \dfrac{1}{X+1}$

Question 29 En déduire que :

- [A] $\mathcal{S} = -\dfrac{14}{9}$
- [B] $\mathcal{S} = -\dfrac{14}{9}$
- [C] $\mathcal{S} = 0$
- [D] $\mathcal{S} = \dfrac{1}{2}$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

FIN DU SUJET

Feuille de réponses de MATHÉMATIQUES

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

Codez votre numéro de candidat ci-contre chiffre par chiffre en noircissant les cases (comme ceci ■), puis complétez l'encadré.

NOM - Prénom(s) : ....

Numéro de candidat : ....

Centre d'examen : ....

Question 1 : A B C D E
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D E
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D E
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C D E
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C D E
Question 13 : A B C D E
Question 14 : A B C D E
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C D E
Question 17 : A B C D E
Question 18 : A B C D E
Question 19 : A B C D E
Question 20 : A B C D E
Question 21 : A B C D E
Question 22 : A B C D E
Question 23 : A B C D E
Question 24 : A B C D E
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D E
Question 27 : A B C D E
Question 28 : A B C D E
Question 29 : A B C D E