



ENGINIUS
Formation & Recrutement

Concours Enginius

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Session 2024

Informations sur le sujet de l'épreuve

Durée de l'épreuve :	1h30
Épreuve notée sur :	20 points
Document(s) autorisé(s) :	<input type="checkbox"/> oui <input checked="" type="checkbox"/> non
Calculatrice autorisée :	<input type="checkbox"/> oui <input checked="" type="checkbox"/> non

Remarques

Le sujet est constitué cinq exercices indépendants.

Pour chaque question de l'épreuve, veuillez noircir (comme ceci ■) la (les) bonne(s) réponse(s) sur la feuille de réponse ci-jointe.

Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent avoir une ou plusieurs bonnes réponses.

Uniquement les feuilles de réponses correctement remplies seront corrigées.

Début du sujet sur la page suivante



Exercice 1

Question 1 Soient a_1, a_2 et a_3 trois réels tels que $\sum_{k=1}^3 \cos(a_k) = \sum_{k=1}^3 \sin(a_k) = 0$.

A $\sum_{k=1}^3 e^{3ia_k} = 0$

B $\sum_{k=1}^3 e^{2ia_k} = 0$

C Aucune des réponses proposées n'est correcte

D $\prod_{k=1}^3 e^{3ia_k} = 0$

E $\prod_{k=1}^3 e^{2ia_k} = 0$

Exercice 2

On considère les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 8z^4 + 8z^3 - z - 1 = 0 : (E) \\ 8\sin^3(\alpha) - 2\sin(\alpha)\sin(3\alpha) - \sin(\alpha) - 3\cos(2\alpha) + 2 = 0 : (E'). \end{cases}$$

Question 2 L'ensemble de solutions, dans \mathbb{C} , de l'équation (E) est :

A $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{3}) \right\}$

B Aucune des réponses proposées n'est correcte

C $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) \right\}$

D $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) \right\}$

E $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{3}) \right\}$

Question 3 L'ensemble de solutions, dans \mathbb{C} , de l'équation (E') est :

A $\mathcal{S}_{(E')} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$, où $k \in \mathbb{Z}$

B $\mathcal{S}_{(E')} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$, où $k \in \mathbb{Z}$

C $\mathcal{S}_{(E')} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right\}$, où $k \in \mathbb{Z}$

D $\mathcal{S}_{(E')} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\}$, où $k \in \mathbb{Z}$

E Aucune des réponses proposées n'est correcte



Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soit $\mathcal{P}_n : z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} z^k$, où $z \in \mathbb{C}$.

Question 4 Pour $z = 1$

- A Aucune des réponses proposées n'est correcte
- B $\mathcal{P}_n(z) = 1$
- C $\mathcal{P}_n(z) = n$
- D $\mathcal{P}_n(z) = n - 1$
- E $\mathcal{P}_n(z) = n + 1$

Question 5 Pour tout $z \neq 1$

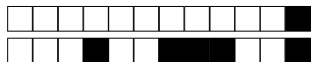
- A $\mathcal{P}_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$
- B $\mathcal{P}_n(z) = \frac{1 - z^{n-1}}{1 - z}$
- C Aucune des réponses proposées n'est correcte
- D $\mathcal{P}_n(z) = \frac{1 - z^{n-1}}{z - 1}$
- E $\mathcal{P}_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{z - 1}$

Question 6 Pour tout $z \in \mathbb{C}$

- A $\mathcal{P}_n(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{i\frac{2k\pi}{n-1}})$
- B $\mathcal{P}_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$
- C $\mathcal{P}_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - e^{i\frac{k\pi}{n}})$
- D Aucune des réponses proposées n'est correcte
- E $\mathcal{P}_n(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$

Question 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose $\mathcal{U}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)$. Déduire, des questions précédentes, l'expression de \mathcal{U}_n en fonction de n :

- A Aucune des réponses proposées n'est correcte
- B $\mathcal{U}_n = \frac{n-1}{2^n}$
- C $\mathcal{U}_n = \frac{n-1}{2}$
- D $\mathcal{U}_n = \frac{n}{2^{n-1}}$
- E $\mathcal{U}_n = \frac{n}{2}$



Exercice 4

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{S}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m^2} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Question 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

- A $2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
- B $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$
- C $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
- D $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
- E *Aucune des réponses proposées n'est correcte*

Question 9 En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

- A $m < \mathcal{S}_m < \sqrt{m^2 + 1} - 1$
- B $\sqrt{m^2 + 1} - 1 < \mathcal{S}_m < m$
- C $\sqrt{m} - \sqrt{m-1} < \mathcal{S}_m < \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$
- D *Aucune des réponses proposées n'est correcte*
- E $\sqrt{m^2 + 1} < \mathcal{S}_m < m - 1$

Question 10 En déduire la partie entière de \mathcal{S}_m

- A $E(\mathcal{S}_m) = m$
- B *Aucune des réponses proposées n'est correcte*
- C $E(\mathcal{S}_m) = 0$
- D $E(\mathcal{S}_m) = \sqrt{m^2 + 1}$
- E $E(\mathcal{S}_m) = m - 1$

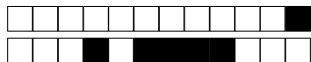
Exercice 5

On considère la suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n - i}{2z_n + 1}.$$

Question 11 On note λ et μ les solutions, dans \mathbb{C} , de l'équation $z = \frac{z - i}{2z + 1}$. On a :

- A $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}; \mu = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- B $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}; \mu = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
- C $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{3}}; \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
- D $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}; \mu = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*



Question 12 On suppose que $z_0 \neq \lambda$, $z_0 \neq \mu$ et que $2z_n + 1 \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose $u_n = \frac{z_n - \mu}{z_n - \lambda}$

- A *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- B La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = i - 1$
- C La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}(3i - 1)$
- D La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}(2i - 1)$
- E La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 1 - i$

Question 13 En déduire des questions précédentes que :

- A *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- B la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\sqrt{2}i)$
- C la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}(i - 1)$
- D la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}(1 - i)$
- E la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

Exercice 6

Soit $x \in [-\pi, \pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{S}_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k^2(k+1)}$.

Question 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

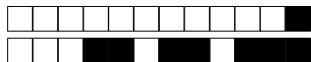
- A $|\mathcal{S}_n(x)| \leq \frac{n-1}{n+1}$
- B $|\mathcal{S}_n(x)| \leq \frac{n}{n+1}$
- C $|\mathcal{S}_n(x)| \leq \frac{n-1}{n^2(n+1)}$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- E $|\mathcal{S}_n(x)| \leq \frac{n}{n^2+1}$

Question 15 Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

- A $|\mathcal{S}_n(x)| \leq \frac{1}{2}(x + \sin(x))$
- B $|\mathcal{S}_n(x)| \leq \frac{1}{2}(|x| - |\sin(x)|)$
- C $|\mathcal{S}_n(x)| \leq \frac{1}{2}(\sin(x) - x)$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- E $|\mathcal{S}_n(x)| \leq \frac{1}{2}(|x| + |\sin(x)|)$

Question 16 La suite de fonctions $x \mapsto \mathcal{S}_n(x)$ converge vers une limite que l'on notera \mathcal{S} . La fonction limite $x \mapsto \mathcal{S}(x)$ vérifie pour tout $x \in [-\pi, 0[\cup]0, \pi]$:

- A $|\mathcal{S}(x)| \leq |x|$
- B $|\mathcal{S}(x)| \leq \frac{|x|}{2}$
- C *Aucune de ces réponses n'est correcte.*
- D $|\mathcal{S}(x)| \leq |\sin(x)|$
- E $|\mathcal{S}(x)| \leq \frac{|\sin(x)|}{2}$



Question 17 ♣ On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de premier terme $u_0 \in [-\pi, \pi]$, définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathcal{S}(u_n)$.

- A La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0
- B La suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- C La suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- D La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$
- E Aucune de ces réponses n'est correcte.

Exercice 7

Soit $x \in [-\pi, \pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{S}_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k^2(k+1)}$

Question 18 Pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$

- A Aucune de ces réponses n'est correcte.
- B $-1 \leq f(x+h) \leq \frac{h^2}{2} + hf(x) + f'(x)$
- C $-1 \leq f(x+h) \leq \frac{h^2}{2} + hf'(x) + f''(x)$
- D $-1 \leq f(x+h) \leq \frac{h^2}{2} + hf'(x) + f(x)$
- E $0 \leq f(x+h) \leq \frac{h^2}{2} + hf'(x) + f''(x)$

Question 19 Pour tout $x \in \mathbb{R}$

- A $|f'(x)| \leq \sqrt{2(1-f(x))}$
- B $|f'(x)| \leq \sqrt{2(1+f(x))}$
- C Aucune de ces réponses n'est correcte.
- D $|f'(x)| \leq 1$
- E $|f'(x)| \leq 2(1-f(x))$

Exercice 8

On considère l'intégrale $\mathcal{L}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$

- A $(n+1)\mathcal{L}_{n+2} = (n+2)\mathcal{L}_{n+1}$
- B $\mathcal{L}_{n+2} = (n+2)\mathcal{L}_{n+1}$
- C $(n+2)\mathcal{L}_{n+2} = (n+1)\mathcal{L}_{n+1}$
- D Aucune de ces réponses n'est correcte.
- E $\mathcal{L}_{n+2} = (n+1)\mathcal{L}_{n+1}$

Question 21 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit $2(n+1)\mathcal{L}_{n+1}\mathcal{L}_n$ vaut :

- A 3π
- B 2π
- C π
- D Aucune de ces réponses n'est correcte.
- E $\frac{\pi}{2}$

Question 22 Pour tout $n \in \mathbb{N}$

- A $\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{\mathcal{L}_n}{\mathcal{L}_{n+1}} \leq 1$
- B $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{\mathcal{L}_n}{\mathcal{L}_{n+1}} \leq 1$
- C $\frac{n^2+1}{n^2+2} \leq \frac{\mathcal{L}_{n+1}}{\mathcal{L}_n} \leq 1$
- D Aucune de ces réponses n'est correcte.
- E $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{\mathcal{L}_{n+1}}{\mathcal{L}_n} \leq 1$



Question 23 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ La suite $(\sqrt{n}\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers :

A 1

B 0

C $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

D $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

E Aucune de ces réponses n'est correcte.

Exercice 9

On considère les deux matrices $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{pmatrix}$, où a, b, c et

d sont des réels. On note γ et μ respectivement la trace et le déterminant de la matrice \mathcal{A} .

Question 24 Le déterminant de la matrice \mathcal{M} est donné par :

A $\det(\mathcal{M}) = \mu\gamma$

B $\det(\mathcal{M}) = 4\mu\gamma^2$

C $\det(\mathcal{M}) = \mu + \gamma$

D $\det(\mathcal{M}) = 4\mu^2\gamma$

E Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 25 La matrice \mathcal{M} est inversible si et seulement si :

A Aucune de ces réponses n'est correcte.

B la matrice \mathcal{A} n'est pas inversible

C la matrice \mathcal{A} est inversible ou sa trace est non nulle

D la matrice \mathcal{A} est inversible

Exercice 10

Question 26 Soient A, B et C des matrices quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

A $(AB - BA)^2 C - C^2 (AB - BA) = 0$

B $(AB - BA)^2 C^2 - C (AB - BA) = 0$

C Aucune de ces réponses n'est correcte.

D $(AB - BA)^2 C + C (AB - BA)^2 = 0$

E $(AB - BA)^2 C - C (AB - BA)^2 = 0$

Exercice 11

Question 27 ♣ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A La matrice a trois valeurs propres réelles distinctes.

B La matrice A est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

C La matrice A est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

D La matrice A est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

E Aucune de ces réponses n'est correcte.



Exercice 12

On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les zéros du polynôme $P = X^4 - X^3 + 1$ dans \mathbb{C} et on pose

$$S = \sum_{i=1}^4 \frac{z_i^3 + 2}{(z_i^2 - 1)^2}.$$

Question 28 La D.E.S (Décomposition en éléments simples), dans \mathbb{C} , de la fraction rationnelle

$F : X \mapsto \frac{X^3 + 2}{(X^2 - 1)^2}$ est donnée par :

A $F(X) = -\frac{3}{4(X-1)^2} + \frac{1}{4(X+1)^2} - \frac{1}{X+1}$

B Aucune de ces réponses n'est correcte.

C $F(X) = \frac{3}{4(X-1)^2} - \frac{1}{4(X+1)^2} - \frac{1}{X+1}$

D $F(X) = \frac{3}{4(X-1)^2} + \frac{1}{4(X+1)^2} - \frac{1}{X+1}$

E $F(X) = \frac{3}{4(X-1)^2} + \frac{1}{4(X+1)^2} + \frac{1}{X+1}$

Question 29 En déduire que :

A $S = -\frac{14}{9}$

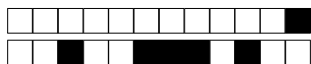
C $S = 0$

D $S = \frac{1}{2}$

B $S = -\frac{14}{9}$

E Aucune de ces réponses n'est correcte.

FIN DU SUJET



Feuille de réponses de MATHÉMATIQUES

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

Codez votre numéro de candidat ci-contre chiffre par chiffre en noircissant les cases (comme ceci ■), puis complétez l'encadré.

NOM - Prénom(s) :
Numéro de candidat :
Centre d'examen :

- Question 1 : A B C D E
- Question 2 : A B C D E
- Question 3 : A B C D E
- Question 4 : A B C D E
- Question 5 : A B C D E
- Question 6 : A B C D E
- Question 7 : A B C D E
- Question 8 : A B C D E
- Question 9 : A B C D E
- Question 10 : A B C D E
- Question 11 : A B C D E
- Question 12 : A B C D E
- Question 13 : A B C D E
- Question 14 : A B C D E
- Question 15 : A B C D E

- Question 16 : A B C D E
- Question 17 : A B C D E
- Question 18 : A B C D E
- Question 19 : A B C D E
- Question 20 : A B C D E
- Question 21 : A B C D E
- Question 22 : A B C D E
- Question 23 : A B C D E
- Question 24 : A B C D E
- Question 25 : A B C D
- Question 26 : A B C D E
- Question 27 : A B C D E
- Question 28 : A B C D E
- Question 29 : A B C D E