Concours Enginius

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Session 2025

Informations sur le sujet de l'épreuve

Durée de l'épreuve :	1h30
Épreuve notée sur :	20 points
Document(s) autorisé(s) :	☐ oui ☒ non
Calculatrice autorisée :	☐ oui ☒ non

Remarques

Le sujet est constitué cinq exercices indépendants.

Pour chaque question de l'épreuve, veuillez noircir (comme ceci ■) la (les) bonne(s) réponse(s) sur la feuille de réponse ci-jointe.

Des points négatifs seront affectés aux mauvaises réponses.

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent avoir une ou plusieurs bonnes réponses.

Uniquement les feuilles de réponses correctement remplies seront corrigées.

Début du sujet sur la page suivante

Exercice 1

Question 1 Pour une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a :

- A Pour établir que la série ne converge pas normalement sur I, il suffit d'établir la non convergence uniforme sur I.
- B La convergence uniforme sur I entraine la convergence absolue en tout point de I
- C La convergence absolue en tout point de I entraine la convergence uniforme sur I
- D La convergence uniforme sur I entraine la convergence normale sur I

Question 2 ♣ Pour une série de nombres réels, on a :

- A Une série absolument divergente est divergente
- B Une série absolument convergente est convergente
- C Une série convergente est absolument convergente
- D Une série divergente est absolument divergente
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 2

On pose pour x réel et n entier naturel, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^x}$ et lorsque $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ converge on note $f(x)$ sa somme : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

Question 3 On a :

- A La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ convergente uniformément sur $]0, +\infty[$
- B La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur tout compact inclus dans $]1, +\infty[$
- C La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ convergente normalement sur $]0, +\infty[$
- D La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ convergente normalement sur $]1, +\infty[$

Question 4 ♣ On a :

- A Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \leq 0$
- B La fonction f ne garde pas un signe constant sur $]0, +\infty[$
- C Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \leq 1$
- D Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq 0$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 On pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n t^{2n}\ \mathrm{d}t$. On a :

A $f(1) = 1$

B $S_N = \dfrac{\pi}{4} + J_N$ où $J_N = \int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$

C $S_N = 1 + J_N$ où $J_N = \int_0^1 \dfrac{\left(-t^2\right)^{N+1}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$

D $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$

Question 6 ♣ Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]0,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a :

A $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{(2n+3)^b}$

B $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{(2n+3)^a}$

C $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{(-1)^n}{(2n+3)^x}$

D $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{(2n+3)^x}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 On a :

A Si $x \in [a,b]$, puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(2n+3)^x} = 0$, la suite des restes (R_n) (où $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$) converge uniformément vers la fonction nulle sur l'intervalle $[a,b]$ et donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ est uniformément convergente sur $[a,b]$

B $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^x} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

C $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

D La fonction f n'est continue que sur $]1,+\infty[$

Question 8 ♣ Notons $I =]1,+\infty[$, on a :

A Les fonctions u_n sont dérivables sur $I =]\,1,+\infty[$ et pour $x \in I, u_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}x}{(2n+1)^{x+1}}$

B La série de fonctions $\sum_{n=0} u_n'$ converge normalement sur tout segment inclus dans I

C La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n'$ converge normalement sur I

D Par le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions, la fonction f est dérivable sur I et, $\forall x \in I,\quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^x} \ln(2n+1)$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 On a :

[A] Pour tout $x \in]-1,1[, \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^x}$

[B] Pour tout $x \in]-1,1[, \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

[C] Pour tout $x \in]-1,1], \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

[D] Pour tout $x \in -1,1]$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$

Question 10 ♣ On a :

[A] Une série de fonctions qui est uniformément convergente sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ n'est pas nécessairement uniformément convergente sur cet intervalle

[B] Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série de réels absolument convergente on peut toujours écrire, pour n entier naturel, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \leq v_{n+1}$

[C] Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série de réels convergente on peut toujours écrire, pour n entier naturel, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k|$

[D] Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série de réels convergente on peut toujours écrire $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|$

[E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 ♣ On a :

[A] Si $0 < x \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ diverge

[B] Si $0 < x \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 0} |u_n(x)|$ diverge

[C] Si $x \leq 0$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ ne diverge pas grossièrement

[D] Si $0 < x \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 0} |u_n(x)|$ diverge

[E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 ♣ On a :

[A] L'ensemble de définition de la fonction f est $]1,+\infty[$

[B] L'ensemble de définition de la fonction f est $]0,+\infty[$

[C] La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ est absolument convergente pour $x \in]1,+\infty[$

[D] La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ est absolument convergente pour $x \in]0,+\infty[$

[E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 On a :

- [A] La série $\sum\limits_{n\geq 0} \int_0^1 \left|(-1)^n t^{2n}\right| \mathrm{d}t$ converge
- [B] On peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme pour intervertir $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_0^1$
- [C] La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n t^{2n}$ converge uniformément sur $[0,1]$
- [D] $f(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{2n}\ \mathrm{d}t$

Exercice 3

Soient S l'ensemble des suites (a_n) dont le terme général a_n est un nombre complexe, I l'ensemble des suites complexes (a_n) telles que la série $\sum |a_n|$ de terme général $|a_a|$ converge, et J l'ensemble des suites complexes (a_n) telles que la série $\sum |a_n|^2$ de terme général $|a_n|^2$ converge.

Question 14 L'ensemble I vérifie :

- [A] J est inclus dans I
- [B] I n'est pas inclus dans l'ensemble des suites bornées
- [C] I est inclus dans l'ensemble des suites convergentes dans $\mathbb{C}$
- [D] I n'est pas inclus dans l'ensemble des suites convergeant vers 0

Question 15 ♣ Soit la série $\sum \dfrac{1}{n^2} z^n, n > 0$

- [A] Son rayon de convergence est ∞
- [B] La suite (a_n) de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ apprtient à I
- [C] La suite (a_n) de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ n'appartient pas à I
- [D] Son rayon de convergence vaut 1
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 Soit la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{b^n}$ où b est un entier > 1, alors

- [A] La somme de la série est $\dfrac{1}{x-b}$
- [B] Son rayon de convergence est $R = b$
- [C] Son rayon de convergence est $R = 1/b$
- [D] La somme de la série est $\dfrac{1}{b-x}$

Question 17 ♣ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On a

- A Si $R > 1$ alors (a_n) appartient à I
- B Si $R > 1$ alors (a_n) n'appartient pas à I
- C Si $R < 1$ alors (a_n) n'appartient pas à
- D Si $R < 1$ alors (a_n) appartient à I
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 18 Soit (a_n) un élément de I, on a alors :

- A I n'est pas un sous-espace vectoriel de S
- B $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| > 0$
- C I est un sous-espace vectoriel de S
- D $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Exercice 4

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)(3-x)}$

Question 19 La dérivée $f^{(n)}(x)$ d'ordre n de la fonction $f(x)$ est :

- A $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{(3-x)^{n+1} - (2-x)^{x+1}}{(x^2-5x+6)^{n+1}}$
- B $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{(2-x)^{n} - (3-x)^{n}}{(x^2+5x-6)^{n}}$
- C $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{(2-x)^{n} - (3-x)^{n}}{(x^2-5x+6)^{n}}$
- D $f^{(e)}(x) = n! \dfrac{(3-x)^{n+1} - (2-x)^{n+1}}{(x^2-5x+6)^{n+1}}$

Question 20 On a :

- A f est développable en série entière autour de $x = 0$ et son rayon de convergence vaut 1
- B f n'est pas développable en série entière autour de $x = 0$
- C f est développable en série entière autour de $x = 0$ et son rayon de convergence vaut 2
- D f est développable en série entière autour de $x = 0$, son rayon de convergence vaut 3

Question 21 Considérons la suite (a_n) définie par $a_n = f^{(n)}(0)$

- A Cette suite appartient à I
- B L'expression de son terme général est $\dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$
- C L'expression de son terme général est $\dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{3^{n+1}}$
- D Cette suite n'appartient pas à I

Exercice 5

On note F l'ensemble des applications dérivables f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = f(\sqrt{x})$$

On note G l'ensemble des applications dérivables g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathrm{R}, \quad g'(t) = e^t g\left(\frac{t}{2}\right)$$

Question 22 ♣ On a :

- A Soit $g \in G$, si on pose pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f(x) = g(\ln x)$, alors $f \in F$
- B Si $f \in F$, $t \mapsto f(e^t)$ est élément de G
- C F et G ne sont pas des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels pour les opérations usuelles
- D Si $f \in F$, $t \mapsto f\left(e^{\frac{t}{2}}\right)$ est élément de G
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 23 ♣ Soit Ψ l'application de F dans G qui, à toute application f de F, associe l'application g de G définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = f(e^t)$.

- A $\operatorname{Ker} \Psi = \{0\}$ et Ψ est injective
- B Ψ est un isomorphisme car endomorphisme injectif en dimension finie
- C Ψ n'est pas surjective
- D Ψ est linéaire
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 6

On désigne par M et A deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2, \varphi$ et f sont leurs endomorphismes canoniquement associés.

Question 24 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On a :

- A $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de passage qui permet de diagonaliser la matrice A
- B $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de passage qui permet de diagonaliser la matrice A
- C $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de passage qui permet de diagonaliser la matrice A
- D La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples

Question 25 ♣ On suppose que $M^2 = I_2$ où I_2 est la matrice unité de $M_2(\mathbb{C})$.

- A Si on note $\mathrm{SP}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice M on a : $\{-1,1\} \subset \mathrm{SP}(M)$
- B On a nécessairement $M = I_2$ ou $M = -I_2$
- C Il n'existe pas de matrice différente de I vérifiant $M^2 = I_2$
- D La matrice M est diagonalisable
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 26 ♣ On a :

- [A] M est diagonalisable si et seulement si M^2 est diagonalisable
- [B] Une matrice nilpotente non nulle est diagonalisable
- [C] Si A est diagonalisable, il existe au moins une matrice diagonalisable M telle que $M^2 = A$
- [D] On suppose que M est diagonalisable et que $M^2 = A$ alors A est diagonalisable
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 27 On a :

- [A] Si x est un vecteur propre de φ, x est un vecteur propre de φ^2
- [B] Si x est un vecteur propre de φ^2, x est un vecteur propre de φ
- [C] Si μ est une valeur propre de φ^2, μ est une valeur propre de φ
- [D] Si μ est une valeur propre de φ, μ est une valeur propre de φ^2

Question 28 On donne quatre assertions :

(1) : φ est non injectif ;
(2) : 0 est valeur propre de φ ;
(3) : 0 est valeur propre de φ^2 ;
(4) : φ^2 est non injectif.

On a :

- [A] Aucune de ces assertions n'est équivalente à une autre
- [B] Deux des quatre assertions seulement sont équivalentes
- [C] Trois des quatre assertions seulement sont équivalentes
- [D] Les quatre assertions sont équivalentes

Exercice 7

Question 29 Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque

- [A] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda}{n}$
- [B] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n}$
- [C] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda}{n!}$
- [D] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{\lambda}\dfrac{\lambda}{n}$

Question 30 ♣ Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, on a :

- [A] Sa série génératrice est une série entière de rayon $+\infty$
- [B] Son espérance est : $E(X) = e^{-2}$
- [C] Sa série génératrice est une série entière de rayon 1
- [D] Son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$ sont égales
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 31 On a :

[A] Si P est une probabilité sur un espace probabilisable, et si A et B sont deux évènements alors $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

[B] Si P est une probabilité sur un espace probabilisable, et si A et B sont deux évènements alors $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

[C] Si X et Y sont deux variables aléatoires suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectivement λ et μ alors $E(X+Y) = \lambda + \mu$

[D] Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectivement λ et μ alors $E(X+Y) = \lambda\mu$

Question 32 Dans cette question et la suivante, on suppose que la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients entrant dans une épicerie dans un certain intervalle de temps suit la loi de Poisson de paramètre λ. En moyenne, n personnes entrent dans l'épicerie en une heure. On a :

[A] La probabilité pour qu'il y ait un seul client qui se présente au bout du temps $T = \dfrac{2}{n}$ est e^{-2}

[B] La probabilité pour qu'il y ait un seul client qui se présente au bout du temps $T = \dfrac{2}{n}$ est $2e^{-2}$

[C] La probabilité pour que k personnes entrent dans un intervalle de temps T est : $P(X=k) = e^{-T}\dfrac{(T)^k}{k!}$

[D] La probabilité pour que k personnes entrent dans un intervalle de temps T est : $P(X=k) = e^{-nT}\dfrac{(nT)^k}{k!}$

Question 33 ♣ On note p la probabilité que X soit un nombre pair :

[A] $p \geq \dfrac{1}{2}$

[B] $p = e^{-\lambda} \operatorname{ch} \lambda$

[C] $p \leq \dfrac{1}{2}$

[D] $p = e^{-\lambda} \operatorname{sh} \lambda$

[E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

FIN DU SUJET

Feuille de réponses de MATHÉMATIQUES

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

Codez votre numéro de candidat ci-contre chiffre par chiffre en noircissant les cases (comme ceci ■), puis complétez l'encadré.

NOM - Prénom(s) : ....

Numéro de candidat : ....

Centre d'examen : ....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D E
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D E
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D E
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D E
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D E
Question 11 : A B C D E
Question 12 : A B C D E
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D E
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D E
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D E
Question 23 : A B C D E
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D E
Question 26 : A B C D E
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D E
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D E